Teorie grafů

ZS 2024/25, FJFI ČVUT

3. domácí úlohy

Deadline: 24.10.2024 11:59:59 středoevropského letního času

---

1) Nalezněte a zkonstruuje, až na isomorfismus, všechny bipartitní grafy G, jejichž doplněk $\overline{G}$ je též bipartitní.

2) Buď $G = (V, E)$ bipartitní graf s maximálním stupněm $\Delta(G) = \Delta$. Dokažte, že existuje Δ-regularní bipartitní graf H takový, že H obsahuje G jako indukovaný podgraf.

3) Připomeňme, že pro graf $G = (V, E)$ nazveme hranu $e \in E$ *mostem*, jestliže $G - e$ má více komponent souvislosti než G. Analogicky, vrchol $v \in V$ nazveme *artikulací*, jestliže $G - v$ má více komponent souvislosti než G. Pro všechna kladná k dokažte:

    (a) Neexistuje $2k$-regulární graf obsahující most.

    (b) Neexistuje k-regulární bipartitní graf obsahující artikulaci.

4) Pro graf $G = (V, E)$ označme *průměrem* G maximální délku nejkratší cesty mezi nějakými dvěma vrcholy, tzn. $\max_{u,v \in V} \operatorname{dist}_G(u, v)$. V případě, že G je nesouvislý, je průměr G roven ∞. Dokažte, že má-li graf průměr alespoň 4, tak jeho doplněk má průměr nejvýše 2.

5) Pro graf $G = (V, E)$, označme $g(G)$ délku nejkratšího cyklu, který G obsahuje; pokud je G acyklický, definujeme $g(G) := \infty$. Poznamenejme, že parametru $g(G)$ se v literatuře říká *obvod grafu*.

    Buď $d \geq 3$ a $r \geq 2$ pevné a $G = (V, E)$ libovolný d-regulární graf. Dokažte:

    (a) Je-li $g(G) = 2r$, tak potom $|V| \geq \frac{2(d-1)^r - 2}{d-2}$.

    (b) Je-li $g(G) = 2r + 1$, tak potom $|V| \geq \frac{d(d-1)^r - 2}{d-2}$.