Teorie grafů

ZS 2024/25, FJFI ČVUT

4. domácí úlohy

Deadline: 31.10.2024 11:59:59 středoevropského zimního času

– –

1a) Pro všechna $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ určete spektrum úplného grafu K_n.

1b) Pro všechna $a, b \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ určete spektrum úplného bipartitního grafu $K_{a,b}$, tj. bipartitního grafu, jež má partity velikosti a a b, a celkem ab hran.

2) Buď $G = (V, E)$ graf s n vrcholy a spektrem $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Dokažte, že

$$\text{(a)} \sum_{i \in [n]} (\lambda_i)^2 = 2|E| \qquad \text{a} \qquad \text{(b)} \sum_{i \in [n]} (\lambda_i)^3 = 6t,$$

kde t značí počet všech tříprvkových podmnožin V indukujících v G úplný podgraf.

3) Buď G souvislý graf s maximálním stupněm D, a nechť spektrum G má největší vlastní číslo λ_1. Dokažte, že pokud $D = \lambda_1$ tak G je D-regulární.

4) Buď G graf s n vrcholy a spektrem $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Dokažte, že G je bipartitní právě tehdy když $\lambda_i = -\lambda_{n-i+1}$ pro každé $i \in [n]$.

5) Realnou matici M nazvěme totálně unimodulární, jestliže všechny její čtvercové podmatice M' splňují $\det M' \in \{-1, 0, 1\}$. Dokažte, že graf G je bipartitní právě tehdy když jeho matice incidence B_G je totálně unimodulární.