Teorie grafů

ZS 2024/25, FJFI ČVUT

7. domácí úlohy

Deadline: 5.12.2024 11:59:59 středoevropského zimního času

---

1) Buď $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že každý $2k$-regulární graf $G = (V, E)$ obsahuje faktor $H = (V, F)$, který je 2-regulární.

2) Čtvercovou matici $n \times n$, kde každá buňka obsahuje přirozené číslo mezi 1 a n, nazvěme *latinským čtvercem* jestliže v každém řádku je každé číslo právě jednou, a v každém sloupci je každé číslo právě jednou. Podobně *latinský obdélník* značí matici s rozměry $m \times n$, kde každá buňka obsahuje přirozené číslo mezi 1 a n, v každém řádku najdeme každé číslo právě jednou, a v každém sloupci najdeme každé číslo nejvýše jednou.

   Dokažte, že každý latinský obdelník s m řádky lze doplnit o $n - m$ nových řádků tak, že výsledná $n \times n$ matice je latinský čtverec.

3 Buď G bipartitní graf s partitami A a B. Dokažte, že

$$\min_{S \subseteq A} |A| - |S| + |N_G(S)| = \nu(G) = \min_{T \subseteq B} |B| - |T| + |N_G(T)|.$$

4) Pro každé přirozené $k \geq 4$ dokažte, že k-regulární graf $G = (V, E)$ se sudým počtem vrcholů a $\kappa'(G) \geq k - 1$ má perfektní párování.

5) Buď $G = (V, E)$ 3-regulární graf bez mostů.

   a) Dokažte, že pro každou $f \in E$ existuje v G perfektní párování M t.ž. $f \in M$.

   b) Dokažte, že pro každé dvě hrany $f_1, f_2 \in E$ existuje v G perfektní párovaní M t.ž. $\{f_1, f_2\} \cap M = \emptyset$.