# Kapitánův deník z Teorie grafů 01TG (ZS 2024)

## 24. září — úvod

**Definice 1.1** *Graf $G = (V, E)$ je uspořádaná dvojice: nějaká konečná množina vrcholů $V$, a množina hran $E$, pro kterou platí $E \subseteq \binom{V}{2}$. Často budeme jako množinu $V$ volit $[n]$.*

Obšírněji je naše definice grafu v některých zdrojích označována jako *prostý neorientovaný graf.*

**Definice 1.2** *Pro daný graf $G$ značíme $V(G)$ jeho množinu vrcholů a $E(G)$ jeho množinu hran.*

**Definice 1.3** *Nulový graf je graf $(\emptyset, \emptyset)$. Nenulový graf je graf, který není nulový.*

**Definice 1.4** *Buď $G = (V, E)$ graf.* Doplňkem grafu $G$ *označujeme graf $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$.*

**Definice 1.5** *Buď $G = (V, E)$ graf, $u \in V$ a $e \in E$. Řekneme, že $u$ je incidentní s $e$, jestliže $u \in e$. Analogicky, pro $f \in E$ t.ž. $e \neq f$ řekneme, že $e$ je incidentní s $f$, jestliže $|e \cap f| = 1$.*

**Definice 1.6** *Pro daný graf $G = (V, E)$ a vrchol $u \in V$, označme $N_G(u)$* sousedství $u$ v $G$, *kde*

$$N_G(u) := \{w \in V : \{u, w\} \in E\}.$$

*Prvkům množiny $N_G(u)$ říkáme sousedé $u$;* $\deg_G(u) := |N_G(u)|$ *říkáme stupeň $u$.*

**Věta 1.1 (Princip sudosti neboli "Handshaking lemma")** *Pro každý graf $G = (V, E)$ platí, že*

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|.$$

**Definice 1.7** *Pro daný graf $G$ na (uspořádané) množině vrcholů $[n]$ definujeme skoré grafu jako posloupnost přirozených čísel $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ t.ž. $d_i = \deg_G(i)$ pro každé $i \in [n]$.*

**Pozorování 1.2** *Buď* $\pi \in S_n$ *permutace. Posloupnost* $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ *je skóre nějakého grafu*

$$\Longleftrightarrow$$

$(d_{\pi(1)}, d_{\pi(2)}, \ldots, d_{\pi(n)})$ *je skóre nějakého grafu.*

**Věta 1.3** *Buď* $0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n \leq n-1$. *Posloupnost* $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ *je skóre nějakého grafu*

$$\Longleftrightarrow$$

$(d_1, d_2, \ldots, d_{n-d_n-1}, \underbrace{d_{n-d_n} - 1, \ldots, d_{n-1} - 1}_{d_n \text{ členů}})$ *je skóre nějakého grafu.*

# 25. září — pokračování úvodu

**Definice 2.1** *Isomorfismus dvou grafů $G = (V, E)$ a $H = (W, F)$ je bijekce $f : V \to W$ t.ž.*

$$\{u, w\} \in E \iff \{f(u), f(w)\} \in F \quad \textit{pro každé dva různé } u, w \in V.$$

*O dvojici grafů, pro které existuje isomorfismus, řekneme, že jsou isomorfní, a značíme $G \cong H$.*

**Definice 2.2** *Automorfismus grafu $G = (V, E)$ je bijekce $f : V \to V$ taková, že jde o isomorfismus $G$ a $G$, neboli*

$$\{u, w\} \in E \iff \{f(u), f(w)\} \in E \quad \textit{pro každé dva různé } u, w \in V.$$

*Množinu všech automorfismů grafu $G$ značíme* $\mathrm{Aut}(G)$.

**Pozorování 2.1** *Pro každý graf $G$, množina* $\mathrm{Aut}(G)$ *s operací skládání tvoří grupu.*

**Definice 2.3** *Graf $G$ nazveme* strnulým*, jestliže* $|\mathrm{Aut}(G)| = 1$.

**Věta 2.2** *Buď $\mathcal{G}_n$ množina všech po dvou neisomorfních grafů s $n$ vrcholy. Platí, že*

$$\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} \leq |\mathcal{G}_n| \leq 2^{\binom{n}{2}}$$

**Definice 2.4** *Sled v grafu $G = (V, E)$ z vrcholu $u \in V$ do vrcholu $w \in V$ je posloupnost*

$$u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots v_{k-1}, e_k, v_k = w$$

*taková, že*

- $v_i \in V$ *pro každé* $i \in [k-1]$,
- $e_i \in E$ *pro každé* $i \in [k]$, *a*
- $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ *pro každé* $i \in [k]$.

**Definice 2.5** *Tah v grafu $G$ z $u$ do $w$ je sled v $G$ z $u$ do $w$ takový, že každá hrana $G$ je v něm obsažena nejvýše jednou.*

**Definice 2.6** *Cesta v grafu $G$ z $u$ do $w$ je sled v $G$ z $u$ do $w$ takový, že každý vrchol $G$ je v něm obsažen nejvýše jednou. Speciálně, z definice plyne, že každá cesta je také tahem.*

Poznámka — nebudeme-li chtít explicitně zdůraznit koncové vrcholy sledu resp. tahu resp. cesty, budeme mluvit pouze o *sledu v grafu* resp. *tahu v grafu* resp. *cestě v grafu.*

**Pozorování 2.3** *Buď $G = (V, E)$ graf a $u \in V, w \in V$ jeho dva vrcholy. Platí, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *Existuje sled v $G$ z vrcholu $u$ do vrcholu $w$,*
2. *Existuje cesta v $G$ z vrcholu $u$ do vrcholu $w$.*

**Definice 2.7** *Pro nenulový graf $G = (V, E)$, uvažujme následující relaci $\rightsquigarrow$ na $V$: pro $u, w \in V$ definujme $u \rightsquigarrow w$ právě když existuje cesta v $G$ z $u$ do $w$.*

**Tvrzení 2.4** *(DÚ) Pro každý graf $G = (V, E)$ je $\rightsquigarrow$ ekvivalencí na $V$.*

**Definice 2.8** *Pro daný graf $G$ budeme třídám ekvivalence $\rightsquigarrow$ říkat komponenty souvislosti $G$. Počet komponent souvislosti budeme značit* $\operatorname{comp}(G)$.

**Definice 2.9** *Nenulový graf $G$ nazveme souvislý, jestliže $\operatorname{comp}(G) = 1$. Pokud nenulový graf není souvislý, neboli $\operatorname{comp}(G) \geq 2$, tak budeme říkat, že je nesouvislý.*

**Věta 2.5** *Pro každé přirozené $n \geq 1$ platí, že*

$$2^{\binom{n}{2}} = \sum_{i \in [n]} \binom{n-1}{i-1} \cdot s_i \cdot 2^{\binom{n-i}{2}},$$

*kde $s_i$ označuje počet souvislých grafů na množině $[n]$.*

**Definice 2.10** *Katalog základních grafů:*

1. *Pro $n \geq 1$, úplný graf na $n$ vrcholech — $K_n := \left([n], \binom{[n]}{2}\right)$.*
2. *Pro $n \geq 1$, prázdný graf na $n$ vrcholech — $E_n := ([n], \emptyset)$.*
3. *Pro $n \geq 1$, cesta na $n$ vrcholech (též cesta délky $n-1$) — $P_n := \big([n], \big\{\{i, i+1\} : i \in [n-1]\big\}\big)$.*
4. *Pro $n \geq 3$, cyklus na $n$ vrcholech (též cyklus délky $n$) — $C_n := \big([n], E(P_n) \cup \big\{\{n, 1\}\big\}\big)$.*

**Definice 2.11** *Buď $G = (V, E)$ graf. Graf $H = (W, F)$ nazveme podgrafem $G$, a budeme značit $H \subseteq G$, jestliže*

1. *$W \subseteq V$ a*
2. *$F \subseteq E \cap \binom{W}{2}$.*

**Definice 2.12** *Podgraf $H$ nazveme indukovaným podgrafem $G$, jestliže $F = E \cap \binom{W}{2}$.*

**Definice 2.13** *Podgraf $H$ nazveme faktorem $G$, jestliže $W = V$.*

**Definice 2.14** *Cyklem v grafu $G$ rozumíme podgraf $H \subseteq G$ t.ž. $H \cong C_k$ pro nějaké $k \geq 3$.*

## 1. října — stromy

**Definice 3.1** *Pro $G = (V, E)$ graf definujeme:*

1. *minimální stupeň $G$ s označením $\delta(G) := \min_{v \in V} \deg_G(v)$,*
2. *maximální stupeň $G$ s označením $\Delta(G) := \max_{v \in V} \deg_G(v)$, a*
3. *průměrný stupeň $G$ s označením $\operatorname{avg}\deg(G) := \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} \deg_G(v) = \frac{2|E|}{|V|}$.*

**Definice 3.2** *Buď $G = (V, E)$ graf, $v \in V$ a $e \in E$.*

1. *Podgraf $G$ indukovaný $V \setminus \{v\}$ budeme zkráceně zapisovat jako $G - v$.*
2. *Faktor $G$ s množinou hran $E \setminus \{e\}$ budeme zkráceně zapisovat jako $G - e$.*

**Definice 3.3** *Buď $G = (V, E)$ graf a $e \in E$. Hranu $e$ nazveme mostem v $G$, jestliže $\operatorname{comp}(G - e) = \operatorname{comp}(G) + 1$ .*

**Lemma 3.1** *Buď $G = (V, E)$ graf a $e \in E$. Platí následující ekvivalence: Hrana $e$ je most v $G$ $\iff$ $e$ není obsažena v žádném cyklu $G$.*

**Věta 3.2** *Buď $G = (V, E)$ nenulový graf. Potom následující definice jsou navzájem ekvivalentní:*

1. *$G$ souvislý a neobsahuje cyklus,*
2. *pro každé $x \in V$ a $y \in V$ existuje právě jedna cesta v $G$ z $x$ do $y$,*
3. *$G$ souvislý a každý tah v $G$ je cestou,*
4. *$G$ je do inkluze vůči hranám maximální graf neobsahující cyklus,*
5. *$G$ je do inkluze vůci hranám minimální graf, který je souvislý,*
6. *$G$ je souvislý a $|V| = |E| + 1$.*

**Definice 3.4** *Graf $G = (V, E)$ nazveme stromem, jestliže je souvislý a nebsahuje cyklus.*

**Definice 3.5** *Je-li $G = (V, E)$ graf a $v \in V$ t.ž. $\deg_G(v) = 1$, potom $v$ nazveme listem $G$.*

**Lemma 3.3** *Každý strom s alespoň 2 vrcholy obsahuje alespoň 2 listy.*

**Pozorování 3.4** *Buď* $G = (V, E)$ *souvislý graf a* $v \in V$ *list* $G$*. Platí, že* $G - v$ *je souvislý.*

**Definice 3.6** *Buď* $G = (V, E)$ *souvislý graf. Faktor* $(V, F) \subseteq G$ *nazveme kostrou* $G$*, jestliže* $(V, F)$ *je strom.*

## 2. října — Cayleyho formule

**Definice 4.1** *Buď $\tau_n$ počet všech stromů na množině vrcholů $[n]$. Jinými slovy, $\tau_n$ značí počet koster $K_n$.*

**Věta 4.1 (Cayleho formule)** *Pro každé $m \geq 2$ platí, že $\tau_n = n^{n-2}$.*

**Důsledek 4.2** *Počet neisomorfních stromů s $n$ vrcholy je alespoň*

$$\frac{1 - o(1)}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^n}{n^{5/2}}.$$

**Věta 4.3** *Počet neisomorfních stromů s $n$ vrcholy je nejvýše $4^n$.*

**Definice 4.2** *Pro graf $G = (V, E)$ a $e \in \binom{V}{2} \setminus E$ označme $G+e$ graf $(V, E \cup \{e\})$.*

**Pozorování 4.4** *Buď $G = (V, E)$ souvislý graf, $T = (V, F)$ nějaká jeho kostra a $e \in E \setminus F$. Potom $T + e$ obsahuje právě jeden cyklus $C_e^T$.*

**Definice 4.3** *Cyklus $C_e^T$ z předcházejícího pozorování nazveme fundamentální cyklus (hrany) $e$ v (grafu) $G$ vůči (kostře) $T$.*

**Pozorování 4.5** *Buď $G = (V, E)$ souvislý graf, $T = (V, F)$ nějaká jeho kostra, $e \in E \setminus F$ a $f \in E(C_e^T)$. Potom $(T + e) - f$ je kostra $G$.*

**Definice 4.4** *Buď $G = (V, E)$ graf. Faktor $H \subseteq G$ určený množinou hran $F \subseteq E$ nazveme sudým faktorem $G$, jestliže pro každý $v \in V$ platí, že $\deg_H(v)$ je sudé.*

**Definice 4.5** *Buď $G = (V, E)$ graf s libovolně zafixovaným pořadím hran, neboli $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Každou $F \subseteq E$ si můžeme skrz její 0/1-ový charakteristický vektor $\vec{v}_F$ představit jako prvek vektorového prostoru $\mathbb{Z}_2^m$.*

**Definice 4.6** *Pro graf $G = (V, E)$ definujme* prostor cyklů $G$ *předpisem*

$$\mathcal{C}_G := \{\vec{v}_F : F \text{ sudý faktor } G\}.$$

**Tvrzení 4.6** *Pro každý graf $G = (V, E)$ je $\mathcal{C}_G$ vektorový podprostor $\mathbb{Z}_2^m$.*

**Věta 4.7** *Buď $G = (V, E)$ souvislý graf, $T$ jeho libovolná kostra, a nechť $C_1, C_2, \ldots, C_{|E|-|V|+1}$ jsou všechny fundamentální cykly v $G$ vůči $T$. Charakteristické vektory těchto $|E| - |V| + 1$ cyklů tvoří bázi prostoru $\mathcal{C}_G$.*

## 8. října — Kruskalův a Dijkstrův algoritmus

**Definice 5.1** *Vážený graf* $G_w = (V, E, w)$ *je uspořádaná trojice, kde* $(V, E)$ *je graf a* $w : E \to \mathbb{R}$.

**Tvrzení 5.1** *Buď* $G = (V, E)$ *souvislý graf a* $w : E \to \mathbb{R}$ *prostá funkce. Potom má vážený graf* $(V, E, w)$ *právě jednu kostru* $T_{\min}$ *t.ž.*

$$\sum_{e \in E(T_{\min})} w(e) = \min_{kostra\ T} \sum_{f \in E(T)} w(f).$$

*Kostře* $T_{\min}$ *říkáme minimální kostra (MST) váženého grafu* $(V, E, w)$.

**Lemma 5.2** *Buď* $G = (V, E)$ *souvislý graf,* $w : E \to \mathbb{R}$ *prostá funkce a* $C \subseteq G$ *cyklus v* $G$. *Je-li* $T_{\min}$ *MST a* $e$ *hrana* $C$ *s největší hodnotou* $w(e)$, *potom* $e \notin E(T_{\min})$.

**Věta 5.3 (O Kruskalově algoritmu)** *Buď* $G = (V, E)$ *souvislý graf a* $w : E \to \mathbb{R}$ *prostá funkce. Seřadíme-li hrany* $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ *dle vah* $w$ *vzestupně a budeme-li v tomto pořadí přidávat hrany* $e_i$ *do* $T$ *za podmínky zachování acykličnosti, výsledkem je, že* $T$ *je MST váženého grafu* $(V, E, w)$.

**Definice 5.2** *Pro vážený graf* $G_w = (V, E, w)$ *a cestu* $P = v_0, e_1, v_1, \ldots, e_\ell, v_\ell$ *v* $G_w$ *definujme*

$$w(P) := \sum_{i \in [\ell]} w(e_i).$$

**Definice 5.3** *Bůď* $G_w = (V, E, w)$ *vážený graf a* $u, v \in V$ *dva jeho (ne nutně různé) vrcholy. Vdáleností* $u$ *a* $v$ *v* $G_w$, *kterou budeme značit* $\mathrm{dist}_{G_w}(u, v)$, *je* $\min_{P \in \mathcal{P}_{uv}} w(P)$, *kde* $\mathcal{P}_{uv}$ *značí množinu všech cest v* $G$ *z* $u$ *do* $v$.

**Definice 5.4** *O funkci* $w : E \to \mathbb{R}$ *řekneme, že je nezáporná, jestliže* $w(e) \geq 0$ *pro každé* $e \in E$.

**Pozorování 5.4** *Pro každý vážený graf* $G_w = (V, E, w)$, *kde* $w$ *je nezáporná, je funkce* $\mathrm{dist}_{G_w}$ *metrikou na* $V$.

**Věta 5.5 (Dijkstra)** *Pro každý vážený graf* $G_w = (V, E, w)$, *kde* $w$ *je nezáporná, a každý vrchol* $s \in V$ *existuje acyklický faktor* $T_s$ *t.ž.*

$$\mathrm{dist}_{G_w}(s, v) = \mathrm{dist}_{T_s}(s, v) \quad \textit{pro každý } v \in V.$$

# 9. října — Multigrafy, #koster, bipartitní grafy

**Definice 6.1** *Multigraf je uspořádaná dvojice $(V, E_M)$, kde $V$ je konečná množina vrcholů, a $E_M$ je multimnožina obsahující prvky $\binom{V}{2}$. Jinými slovy, každá dvojice vrcholů může být spojena i více než jednou hranou.*

*Alternativně, multigraf je vážený graf $G = (V, E, w)$, kde $w : E \to \mathbb{N}_{\geq 1}$. Pro danou hranu $e \in E$ říkáme hodnotě $w(e)$ násobnost hrany $e$.*

**Definice 6.2** *Multigraf $G = (V, E, w)$ je souvislý, jestliže graf $(V, E)$ je souvislý.*

**Definice 6.3** *Cyklus délky* 2 *je multigraf $(V, E_M)$ s $V = [2]$ a $E_M = \{\{1, 2\}, \{1, 2\}\}$.*

**Definice 6.4** *Počet koster multigrafu $G = (V, E_M)$ definujeme jako počet $F \subseteq E_M$ t.ž. $(V, F)$ je strom, a značíme ho $T(G)$. Poznamenjme, že aby $(V, F)$ mohl býti stromem, tak nutně násobnost káždé hrany v $F$ je rovna jedné (tzn. $F$ je množina).*

**Definice 6.5** *Pro daný multigraf $G = (V, E_M)$ a hranu $\{x, y\} = e \in E$, definujme multigrafovou kontrakci hrany $e$ bez smyček jako následující multigraf, který budeme značit $G/e$, na množině vrcholů $(V \setminus \{x, y\}) \cup \{z\}$ s hranami $E'_M$:*

- *Každou $\{u, v\} \in E_M$, kde $\{u, v\} \cap \{x, y\} = \emptyset$, vložíme do $E'_M$,*
- *každou $\{u, x\} \in E_M$, kde $u \neq y$, změníme na $\{u, z\}$ a vložíme do $E'_M$, a*
- *každou $\{u, y\} \in E_M$, kde $u \neq x$, změníme na $\{u, z\}$ a vložíme do $E'_M$.*

*Zdůrazněme, že násobnost každé hrany $\{u, v\}$, kde $\{u, v\} \cap \{x, y\} = \emptyset$, v $G/e$ je stejná jako násobnost $\{u, v\}$ v $G$, a násobnost každé hrany $\{u, z\}$ v $G/e$ je rovna součtu násobností hran $\{u, x\}$ a $\{u, y\}$ v $G$.*

**Tvrzení 6.1** *Buď $G = (V, E_M)$ multigraf a $e \in E_M$ jeho libovolná hrana. Potom platí, že $T(G) = T(G - e) + T(G/e)$.*

**Definice 6.6** *Graf $G = (V, E)$ nazveme bipartitní, jesliže existuje rozklad $V$ na dvě částí $L$ a $R$ t.ž. každá hrana vede "mezi" $L$ a $R$, neboli $|e \cap L| = |e \cap R| = 1$ pro každou $e \in E$.*

**Definice 6.7** *Buď $G = (V, E)$ graf a $W \subseteq V$. $W$ nazveme* nezávislou množinou *v $G$, jestliže podgraf $G$ indukovaný $W$ je prázdný, neboli $E \cap \binom{W}{2} = \emptyset$. Jinak řečeno, $|e \cap W| \leq 1$ pro každou $e \in E$.*

Poznámka — alternativní definice pro bipartitnost: $V$ lze rozdělit na dvě množiny $L$ a $R$ t.ž. obě jsou nezávislé v $G$.

**Pozorování 6.2** *Je-li $G$ bipartitní graf a $H \subseteq G$ jeho podgraf, tak potom $H$ je bipartitní.*

**Definice 6.8** *Je-li $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell$ tah v grafu, potom jeho délkou rozumíme počet hran, které obsahuje (tzn. $\ell$).*

**Definice 6.9** *O tahu v grafu $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell$ řekneme, že je uzavřený, jestliže jeho dva konce jsou stejným vrcholem (tzn. $v_0 = v_\ell$).*

**Věta 6.3** *Následující tvrzení jsou pro graf $G = (V, E)$ navzájem ekvivalentní:*

1. *$G$ je bipartitní.*
2. *$G$ neobsahuje uzavřený tah liché délky.*
3. *$G$ neobsahuje indukovaný podgraf isomorfní lichému cyklu.*
4. *$G$ neobsahuje lichý cyklus (jako podgraf, ne nutně indukovaný).*

**Věta 6.4** *Každý graf $G = (V, E)$ obsahuje bipartitní faktor $(V, F)$, který splňuje $|F| \geq \left\lceil \frac{|E|}{2} \right\rceil$.*

**Věta 6.5** *Každý graf $G = (V, E)$ s $|E| \geq 1$ obsahuje indukovaný podgraf $H$, který splňuje $\delta(H) > \frac{|E|}{|V|}$.*

## 15. října — Graham-Pollak, matice (multi)grafu

**Definice 7.1** *Buď $G = (V, E)$ graf. O $m$ podgrafech $H_1, H_2, \ldots, H_m \subseteq G$ řekneme, že rozkládají $G$, jestliže každá hrana $e \in E$ je obsažena v právě jednom podgrafu $H_i$.*

**Věta 7.1** *Pro každé $n \geq 3$ platí, že jsou-li $H_1, H_2, \ldots, H_m$ úplné grafy, každý s nejvýše $n-1$ vrcholy, jež rozkládají $K_n$, tak potom $m \geq n$.*

**Definice 7.2** *Bipartitní graf $G = (V, E)$ s částmi $L$ a $R$ nazveme* úplný bipartitní*, jestliže $|E| = |L||R|$, a značíme ho $K_{|L|,|R|}$.*

**Věta 7.2 (Graham-Pollak)** *Pro každé $n \geq 2$ platí, že jsou-li $H_1, H_2, \ldots, H_m$ úplné bipartitní grafy, jež rozkládají $K_n$, tak potom $m \geq n-1$.*

**Definice 7.3** *Matice sousednosti multigrafu $G = ([n], E, w)$ je symetrická $n \times n$ matice $A_G$, kde všechny prvky na diagonále jsou rovny nule, a $(A_G)_{i,j}$ pro $i \neq j$ je rovno* $\begin{cases} w(\{i,j\}) & \text{pokud } \{i,j\} \in E, \text{a} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$

**Tvrzení 7.3** *Buď $G = ([n], E, w)$ multigraf s maticí sousednosti $A_G$. Pro každě $k \in \mathbb{N}$ platí, že prvek matice $(A_G)^k$ na pozici $i, j$ je roven počtu sledů délky $k$ z vrcholu $i$ do vrcholu $j$.*

**Definice 7.4** *Matice incidence multigrafu $G = ([n], E, w)$ s celkem $m$ hranami $e_1, e_2, \ldots, e_m$ je boolovská $n \times m$ matice $B_G$, kde v $i$-tém sloupci jsou přesně dve jedničky, a to na pozicích odpovídajících koncům hrany $e_i$.*

**Pozorování 7.4** *Buď $G = ([n], E, w)$ multigraf s maticí sousednosti $A_G$ a maticí incidence $B_G$. Potom platí, že*

$$B_G \cdot B_G^T = \begin{pmatrix} \deg_G(1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \deg_G(2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \deg_G(n) \end{pmatrix} + A_G\,.$$

**Definice 7.5** *Spektrum multigrafu $G$ s $n$ vrcholy jsou vlastní čísla jeho matice sousednosti $A_G$. Spektrum značíme $\mathrm{Sp}(G) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ a předpokládáme, že platí $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$.*

**Tvrzení 7.5** *Buď* $G = (V, E)$ *graf s maximálním stupněm* $\Delta$*, a nechť* $\lambda_1$ *je největší vlastní číslo matice sousednosti* $A_G$*. Potom platí, že*

$$\Delta \geq \lambda_1 \geq \frac{2|E|}{|V|} = \operatorname{avg}\deg(G)\,.$$

## 16. října — Perron-Frobenius, Laplaceova matice

**Věta 8.1** *Buď $G = (V, E)$ souvislý graf s $|V| \geq 2$, a nechť $\vec{v}$ je vlastní vektor příslušící největšímu vlastnímu číslu $A_G$. Potom platí, že souřadnice $\vec{v}$ jsou všechny buď ostře kladné, nebo ostře záporné.*

**Důsledek 8.2** *Buď $G = (V, E)$ souvislý graf. Potom platí, že násobnost největšího vlastního čísla $A_G$ je rovna jedné.*

**Věta 8.3** *Buď $G = ([n], E)$ souvislý graf se spektrem $\mathrm{Sp}(G) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Platí, že $\lambda_n = -\lambda_1 \iff G$ bipartitní.*

**Definice 8.1** *Graf $G$ nazveme $d$-*regulárním* jestliže $\delta(G) = \Delta(G) = d$.*

**Věta 8.4** *Buď $G = ([n], E)$ souvislý $d$-regulární graf s $\mathrm{Sp}\,(G) = (d, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, a nechť $\vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ jsou odpovídající vlastní vektory k $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Potom pro každé $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$ platí, že $\sum_{j \in [n]} (\vec{v_i})_j = 0$.*

**Důsledek 8.5** *Buď $G = ([n], E)$ $d$-regulární graf s $\mathrm{Sp}\,(G) = (d, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Potom $\mathrm{Sp}\left(\overline{G}\right) = (n - d - 1, -\lambda_n - 1, -\lambda_{n-1} - 1, \ldots, -\lambda_2 - 1)$.*

**Definice 8.2** *Laplaceova matice multigrafu $G = ([n], E, w)$ je symetrická $n \times n$ matice $L_G$, kde*

- *$(L_G)_{i,i}$, pro $i \in [n]$, je rovno $\deg_G(i)$, a*
- *$(L_G)_{i,j}$, pro $\{i, j\} \in \binom{[n]}{2}$, je rovno* $\begin{cases} -w(\{i,j\}) & \text{pokud } \{i,j\} \in E, \text{a} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$

**Pozorování 8.6** *Buď $G = ([n], E, w)$ multigraf s maticí sousednosti $A_G$, maticí incidence $B_G$ a Laplaceovou maticí $L_G$. Potom platí, že*

$$L_G = \begin{pmatrix} \deg_G(1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \deg_G(2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \deg_G(n) \end{pmatrix} - A_G = B_G \cdot B_G^T - 2A_G.$$

**Pozorování 8.7** *Buď $G = ([n], E, w)$ multigraf s Laplaceovou maticí $L_G$. Matice $L_G$ je singulární, a pro každý vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ platí, že*

$$x^T L_G x = \sum_{\{i,j\} \in E_M} \left((\vec{x})_i - (\vec{x})_j\right)^2.$$

**Tvrzení 8.8** *Buď $G = ([n], E, w)$ multigraf a $L_G$ jeho Laplaceova matice. Platí, že hodnost $L_G$ je rovna $n - 1 \iff G$ je souvislý.*