Věta (Tutte-Bergeho formule). *Buď $G = (V, E)$ graf, $\alpha'(G)$ velikost největšího párování v G, $\mathrm{odd}(G)$ počet lichých komponent G a pro libovolnou množinu vrcholů S nechť $G \setminus S$ značí indukovaný podgraf G vrcholy $V \setminus S$. Potom platí následující:*

$$2\alpha'(G) = \min_{S \subseteq V} |V| + |S| - \mathrm{odd}(G \setminus S)$$

Důkaz. Nerovnost $\leq$ je jednoduchá. Pro libovolnou množinu S, pokud graf $G \setminus S$ obsahuje l lichých komponent, potom libovolné párování v G neobsahuje alespoň $l - |S|$ vrcholů (konkrétně v alespoň $l - |S|$ lichých komponentách $G \setminus S$ zbyde alespoň jeden nepokrytý vrchol).

Druhá nerovnost ($\geq$) je poněkud těžší, dokážeme ji indukcí dle počtu vrcholů G. Pokud G neobsahuje žádný vrchol, je (ne)rovnost triviálně splněna. Předpokládejme tedy, že G je neprázdný. Našim úkolem je nalézt $S \subseteq V$, že dvakrát počet hran největšího párování (neboli počet pokrytých vrcholů) bude roven $|V| + |S| - \mathrm{odd}(G \setminus S)$. Rozlišme nyní následující dva případy:

1. existuje vrchol v takový, že každé největší párování G obsahuje (pokrývá) vrchol v,

2. takový vrchol neexistuje, neboli pro každý vrchol v existuje největší párování M_v takové, že v není pokryt v M_v.

V prvním případě použijme indukci na $G' := G \setminus v$. Z indukčního předpokladu získáváme množinu S' takovou, že $2\alpha'(G') = |V'| + |S'| - \mathrm{odd}(G' \setminus S')$. Položme $S := S' \cup \{v\}$; tvrdíme, že S je námi hledaná množina vrcholů pro G. Z předpokladu na v víme, že $\alpha'(G) = \alpha'(G') + 1$, což spolu s $|V| = |V'| + 1$, $|S| = |S'| + 1$ a faktem, že $G' \setminus S'$ je izomorfní s $G \setminus S$ potvrzuje, že S je přesně ta množina, kterou jsme hledali.

V druhém případě ani indukci použít nemusíme, situaci totiž vyřešíme pomocí následujícího lemmatu.

Lemma (Gallaiovo). *Buď G souvislý graf takový, že pro každý vrchol v existuje největší párování M_v takové, že v není pokryt v M_v. Potom po odebrání libovolného vrcholu z grafu G vzniklý graf obsahuje perfektní párování, jinými slovy tedy $2\alpha'(G) = |V(G)| - 1$. Speciálně tedy G ma lichý počet vrcholů.*

Odložme důkaz lemmatu na konec tohoto spisku a podívejme se nejdříve, jak z něj plyne důkaz věty. To je snadné, protože neexistuje žádný vrchol v, který by byl ve všech největších párováních G, můžeme na každou z komponent G použít Gallaiovo lemma. Z něj vyplývá, že každá taková komponenta je lichá a existuje v ní párování, které pokrývá všechny její vrcholy vyjma jednoho (dokonce libovolného). Vidíme tedy, že $2\alpha'(G) = |V| - \mathrm{odd}(G)$. Stačí tedy volit $S := \emptyset$ a důkaz věty je tím hotov.

Zbývá tedy dokázat slíbené lemma.Uvažme nějaké největší párování M v G a nechť pro spor nepokrývá dva vrcholy u a v. Ze všech možných voleb M zvolme takové, že vzdálenost u a v je nejmenší možná; G je souvislý, takže tato vzdálenost je vždy konečná. Zároveň M je největší, takže tato vzdálenost je alespoň dva a proto existuje w libovolný vnitřní vrchol (nějaké) nejkratší cesty mezi u a v. Z minimality volby u a v je w v M pokryt. Nicméně z předpokladů lemmatu víme, že existuje největší párování M_w takové, že w není pokryto. Protože M minimalizovalo vzdálenost u a v, všimněme si, že u i v jsou v M_w pokryty.

Uvažme nyní podgraf $H \subseteq G$ s hranami určenými symetrickou diferenci hran M a M_w. To je kolekce (sudých) cyklů a cest, na kterých se střídají hrany z M a M_w. Protože u, v a w jsou obsaženy v právě jednom párování M resp. M_w, mají u, v i w v H stupeň jedna. Jsou to tedy začátky střídavých cest. Uvažme střídavou cestu začínající ve vrcholu w, který je nepokryt v M_w. Tato cesta nutně končí končí ve vrcholu, který není pokryt v M, jinak bychom její alternací získali párování o jedna větší než je M_w. Nicméně tento konec nemůže být zároveň u a zároveň v, proto alternací této cesty získáme párování M', které má stejnou velikost jako M_w (tedy je největší). Avšak M' nepokrývá w a alespoň jeden vrchol z dvojice u, v. Obě vzdálenosti u a w resp. v a w jsou však kratší než vzdálenost u a v, což je spor s volbou M. $\square$