Cvičení začíná v 7:35

1.16: Pro která $m \in \mathbb{R}$ má

$4x^2 - 8mx - 6m + 9 = 0$ $\quad x_1, x_2$ t.ž. $\boxed{x_1 = 3x_2}$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a} \qquad \dots \qquad m \in \{-3, 1\}$

$$x_{1,2} = \frac{8m \pm \sqrt{D}}{8} \qquad x_1 = \frac{8m + \sqrt{D}}{8} = 3 \cdot \frac{8m - \sqrt{D}}{8}$$

$$4|m| = \sqrt{D} \Leftarrow 4m = \sqrt{D} \vee -4m = \sqrt{D} \leftarrow \frac{8m - \sqrt{D}}{8} = 3 \cdot \frac{8m + \sqrt{D}}{8}$$

1.20: $\boxed{\frac{1 - tg x}{1 + tg x} = 2\cos 2x}$ $\qquad tg(x) \neq -1 \dots$ $\quad x$

$\cos(x) \neq 0 \dots$

$$\frac{1 - \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

① $\cos x \neq \sin x$

② $\cos x = \sin x$

$\boxed{x \in \cancel{\pi/4 + k\pi}}$

$$\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = 2(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$$

$$1/2 = (\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2\sin 2x \quad \dots ① \quad \boxed{\sin 2x = -1/2}$$

$$\left\{ \frac{-\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\|$$

$$\left\{ \frac{11\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

množina A a množina B jsou ekvivalentní pokud $|A| = |B|$

$$\Updownarrow$$

$$\exists f: A \to B \text{ bijekce}$$

$$|(0,1)| = |[0,1]| = |\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}|$$

$2^{\mathbb{R}}$ ← všechny podmnožiny $\mathbb{R}$

všechny podmnožiny $\mathbb{N}$

$$\boxed{|2^{\mathbb{R}}| \neq |\mathbb{R}|}$$

$\nexists$ bijekce

$$2^{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{array}{ll} \{\alpha\} & \alpha \in \mathbb{R} \\ \{\alpha, \beta\} & \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ [a,b] & , a < b \\ \vdots & \end{array} \right\}$$

$$2^{\mathbb{R}} = \{ X, X \subseteq \mathbb{R} \}$$

$$|2\mathbb{N}| \stackrel{\triangle}{=} |\mathbb{N}|$$

↑ sudá přirozená

$M \supseteq M'$

$\cancel{[0,1]}^{M'}$ je nespočetná $\Longrightarrow$ $\cancel{\mathbb{R}}$ nespočetná

podmnožina spočetné je spočetná nebo konečná

$\mathbb{R}$ spočetná $\Longrightarrow$ $[0,1]$ je spočetná ↯

Věta:

$\not\exists$ množina M, $|2^M| \neq |M|$

$\not\exists$ bijekce

Dk (idea): podobně jako proč $[0,1]$ není spočetný

"diagonální důkaz"

$|2^{\mathbb{N}}| \neq |\mathbb{N}|$

Věta: $(0,1)$ je nespočetná

$\Downarrow$ $(0,1)$ spočetná

$x_i^{(j)} \in \{0, \dots 9\}$

$x_1 = 0.x_1^{(1)} x_1^{(2)} \dots$

$x_2 = 0.x_2^{(1)} x_2^{(2)} 5555$

$\vdots$

$x_n = 0.x_n^{(1)} x_n^{(2)} \dots x_n^{(n)}$

$\vdots$

$y = 0.y^{(1)} y^{(2)} \dots$

$y^{(n)} := \boxed{9 - x_n^{(n)}}$

$0.4\underbrace{55999}\dots$

$y = 0.5\underbrace{00000000}\dots$

$(0,1)$ nespočetná

$M \subseteq (0,1)$ je nespočetná

$M := \{0.x^{(1)}x^{(2)} \dots$ t.ž. $x^{(i)} \in \{1, \dots 8\}\}$

TRIK: M je nespočetná

p10 spor M spočetná

$x_1 = 0.\, x_1^{(1)} x_1^{(2)} \ldots$

$x_2 = 0.\, x_2^{(1)} x_2^{(2)} \ldots$

$\vdots$

$x_n = 0.\, x_n^{(1)} x_n^{(2)} \ldots x_n^{(n)} \ldots$

$\vdots$

$1-\delta \leftarrow \boxed{y^{(n)}} = 9 - \boxed{x_n^{(n)}}$ x $1-\delta$ $\quad y \in M$

? $y = x_n \qquad y^{(n)} \neq x_n^{(n)}$ ↯

2.3: Dokažte, že

$$(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee D) \wedge (A \vee C))$$

0 ≡ nepravda, 1 ≡ pravda

A	B	C	Levá strana	Pravá strana
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i\right) \vee B \Leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} (A_i \vee B)$ (*) ?

$A_1 \vee B \Leftrightarrow A_1 \vee B$

$n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$ ...

Dk: mat. indukcí 1) $n=2$ ✓ 2) předpokládejme, že (*) platí pro $\forall n' \le n$

X	Y	
0	0	0
0	1	
1	0	
1	1	

$$\left(\underbrace{\bigwedge_{i=1}^{n+1} A_i}_{X \wedge Y}\right) \vee B = \left(\underbrace{\left(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i\right)}_{X} \wedge \underbrace{A_{n+1}}_{Y}\right) \vee B$$

$$(X \wedge Y) \vee B = X \vee B \wedge Y \vee B$$

$$\left(\left(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i\right) \vee B\right) \wedge (A_{n+1} \vee B) = \left(\bigwedge_{i=1}^{n} (A_i \vee B)\right) \wedge (A_{n+1} \vee B)$$

$$= \bigwedge_{i=1}^{n+1} (A_i \vee B) = (*)$$ QED

$1/n > 1/2n \ldots$

$x \in Q, \ x \geq \emptyset$

$\exists x \in \mathbb{R}$ $\quad V_1 \quad$ PRAVDA $x = 1$

$\Uparrow$

$\exists! \, x \in \mathbb{R}$ $\quad V_2 \quad$ NEPRAWDA $x = -1$

$x^2 = 1$

$\neg(\exists x \in \mathbb{R} : V) : \forall x \in \mathbb{R} : \neg V$

$\neg(\exists! \, x \in \mathbb{R} : V) = \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2) : V$

$\vee$

$\forall x \in \mathbb{R} : \neg(V)$

2.2)

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad (*)$$

$n=1$ $\quad \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ ✓

$n \geq 2$: předpokládejme že $(*)$ platí pro $n \leq n-1$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \underbrace{\prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k-1}{2k}} \cdot \frac{2n-1}{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$\Updownarrow \; n \geq 2$

$$(2n-1)\sqrt{2n+1} \leq 2n\sqrt{2n-1} \quad |^2$$

protože L i P jsou kladné, tak $L \leq P \Leftrightarrow L^2 \leq P^2$

$$(2n-1)^{\cancel{2}}(2n+1) \leq 4n^2 \cancel{(2n-1)}$$

$$(2n-1)(2n+1) \leq 4n^2$$

$$4n^2-1 \leq 4n^2 \quad \blacksquare$$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$n=1$ ✓ $\quad n \geq 2$, předpokládejme že

platí pro $n' \leq n-1$

$$\prod_{k=1}^{n'} \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{2n'+1}}$$

$n' = n-1$

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \boxed{\prod_{k=1}^{n'} (\ldots)} \boxed{\prod_{k=n'+1}^{n} (\ldots)}$$

$$\boxed{} \times \frac{2n-1}{2n}$$

$2 \mid n$ 2 dělí n

$2 \nmid n$ 2 <u>nedělí</u> n