Věta (Hales-Jewett):

$\forall \ell, \forall r \in \mathbb{N} \quad \exists D := D(\ell, r)$ aka $HJ(r, \ell)$

t.ž. $\forall$ obarvení $\{1, \dots, \ell\}^D \longrightarrow \{1, \dots, r\}$

obsahuje monochromatickou kombinatorickou přímku

Kombinatorická přímka $\mathcal{L} \equiv$ vzor (pattern) τ

τ slovo délky D obsahující znaky $\{1, \dots \ell, *\}$

žolík

t.ž. obsahuje ≥ 1 $*$ $\equiv \tau \in \{1, \dots \ell, *\}^D \setminus \{1, \dots \ell\}^D$

$$\mathcal{L}_\tau = \{\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(\ell)\}$$

$\tau(i)$ = slovo po nahrazení všech $*$ v τ symbolem i

Př: $\tau = 1*3*$ $\quad \ell = 4$

$$\mathcal{L}_\tau = \{1131, 1232, 1333, 1434\}$$

Kombinatorická n-krychle v dimenzi d reprezentovaná vzorem $\tau \in \{1, \dots \ell, *_1, *_2, \dots, *_n\}^d$ takový že každá z n $*_i$ se vyskytuje ≥ 1

$$C_\tau = \{\tau(i_1, i_2, \dots, i_n) : i_1 \dots i_n \in \{1, \dots \ell\}\}$$ kde

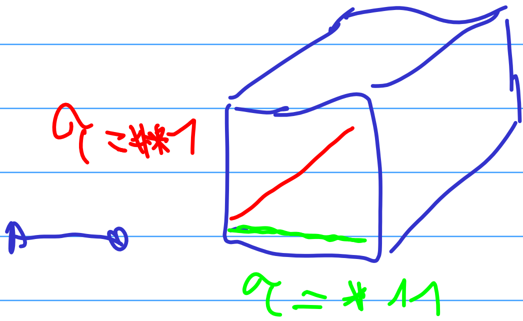
$\sigma(i_1 \dots i_n)$ znamená σ po nahvězdení

všechny $*_1 \longrightarrow i_1$

$*_2 \longrightarrow i_2$

$\vdots \qquad \vdots$

$*_n \longrightarrow i_n$



TVRZENÍ: $\forall r, \forall \ell, \forall d \;\exists D := D(r,\ell,d)$

t.ž. $\forall$ obarvení $\underline{\chi}: \{1,\dots,\ell\}^D \to \{1,\dots,r\}$

$\exists$ d-kyt. chlo $\underline{\sigma}$ t.ž. $\forall$ dole-sousední body $b, \tilde{b} \in \{1,\dots,\ell\}^d$

platí $\chi(\sigma(b)) = \chi(\sigma(\tilde{b}))$ $\quad \sigma(b) = \sigma(b_1 \dots b_d)$

kde dole-sousední body $b = b_1 \;\dots\; 12 \;\dots\; b_d$

$\tilde{b} = \tilde{b}_1 \;\dots\; 21 \;\dots\; \tilde{b}_d$

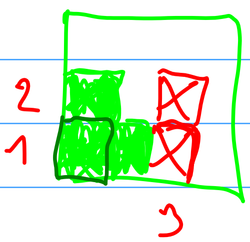
$\exists i \in \{1 \dots D\}$ t.ž. $b_j = \tilde{b}_j \;\; \forall j \neq i$

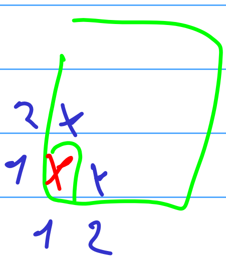
$b_i = 1$ & $\tilde{b}_i = 2$ NEBO $b_i = 2$ & $\tilde{b}_i = 1$

Př.

$d = 2$

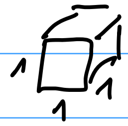
$\ell = 3$

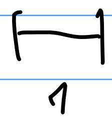




D

Dk (Věta): pro pevný # barev v r, indukcí podle ℓ

$\ell = 1$  $D = 1$ nezávisle na r



$\ell \geq 2$:

$$\underbrace{D_{HJ}(r,\ell)} = D_{\text{TVRZENÍ}}(r,\ell,d), \text{ kde}$$

$$d := D_{HJ}(r,\ell-1)$$

mějme χ obarvení $\{1,\dots,\ell\}^D \to \{1,\dots,r\}$. Použijme

Tvrzení na $\chi \rightsquigarrow \exists$ d-krychli τ

t.ž. # dobo-sousední body $b, \tilde{b} \in \{1,\dots,\ell\}^d$

$$\chi(\tau(b)) = \chi(\tau(\tilde{b}))$$

vezmeme τ_1

Uvažme pomocnou krychli $\{\underbrace{2,\dots,\ell}_{\ell-1}\}^d$ a její obarvení

$$\chi'(b) = \chi(\tau(b)) \quad \text{z indukce } \exists$$

monochromatická komb. přímka v

$$\chi'(\underbrace{v(2)}) = \chi'(v(3)) = \dots = \chi'(v(\ell))$$

v monochromatická přímka v χ'

kombinatorická přímka určená v o τ

$$\mathcal{L} = \{\tau(v(i)),\ i \in \{1, \dots, \ell\}\}$$ je monochrom. v χ

$HJ(n, \ell-1)$

z $\boxed{\text{INDUKCE}}$: $\chi(\tau(v(2))) = \chi(\tau(v(3))) = \dots = \chi(\tau(v(\ell)))$

Co barva $\tau(v(1))$? Nechť v má $*$ na pozicích $p_1 \dots p_i$

$$\tau(v(1)) \text{ vs. } \tau(v(2))$$

$$\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\quad p_1 \qquad\qquad\quad p_2 \qquad\quad p_3 \\
\chi(\tau(v_1 v_2\, 1\, v_{p_1+1} \dots 1 \dots 1 \dots\dots)) \\
\| \\
\chi(\tau(v_1 v_2\, 2\, v_{p_1+1} \dots 1 \dots 1 \dots\dots)) \\
\| \\
\chi(\tau(v_1 v_2\, 2\, v_{p_1+1} \dots 2 \dots 1 \dots\dots)) \\
\| \\
\vdots \\
\| \\
\chi(\tau(v_1 v_2\, 2\, v_{p_1+1} \dots 2 \dots 2 \dots\dots))
\end{array}$$

dolo-sousední!

ZÁVĚR $\chi(\tau(v(1))) = \chi(\tau(v(2)))$ ∎

barev   délka   dimenzí   podkrychle   „hezká"   určí dole-soused

TVRZENÍ: $\forall r, \forall \ell, \forall d \quad \exists \boxed{D} := D(r, \ell, d)$

t.ž. $\forall$ obarvení $\underline{\chi}: \{1, \dots, \ell\}^D \to \{1, \dots, r\}$

$\exists$ d-krychle $\underline{\tau}$ t.ž. $\forall$ dole-sousední body $b, \tilde{b} \in \{1, \dots, \ell\}^d$

platí $\chi(\tau(b)) = \chi(\tau(\tilde{b}))$ $\tau(b) = \tau(b_1 \dots b_d)$

Důk: mějme r, ℓ, d dané, zvolme

$$D := D_1 + D_2 + \dots + D_d$$

kde

$$D_1 := r^{(\ell^d)} \qquad \text{pro } i \geq 2 \quad D_i := r^{\ell^{\sum_{j<i} D_j + d}}$$

Úkol: pro dané $\underline{\chi}: \{1, \dots, \ell\}^D \to \{1, \dots, r\}$

najít τ, Finta: τ hledejme speciálního tvaru

$$\dots *_1 \dots *_1 \dots *_1 \,|\, \dots *_2 \dots *_2 \dots \,|\, *_3 \dots *_3 \dots *_3 \,|\, \dots$$

$\forall i$ $*_i$ tvoří souvislý blok uvnitř τ

$$\tau = \underbrace{\tau_1 | \tau_2 | \dots \boxed{\tau_d}}$$

kde τ_i obsahuje „jenom" $*_i$, délka $\underline{D_i}$

Hledejme zpětnou rekurzí od $i = d$, $i = d-1, \dots, i = 1$

$i := d$: $\rightsquigarrow$ σ_d

$$\chi(\underbrace{\boxed{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{d-1}}}_{\text{délka } \sum_{j<d} D_j} \underbrace{\boxed{\sigma_d}}_{D_d})$$

1111111
1111112
1111122 $\Big\}$ D_d možností

možností jak dosadit $\uparrow$ $\ell^{\sum_{j<d} D_j}$

Pomocné

$$f_0^\chi(\underbrace{\text{PREFIX}}_{\sum_{j<d} D_j}) := \chi(\boxed{\text{PREFIX}}\overbrace{(111111)}^{\text{SUFIX}})$$

$\vdots$

$$f_k(\quad) := \chi(\boxed{\text{PREFIX}}(111\overbrace{222}^{k}))$$

$f_{(D_d-1)}$

D_d funkcí f_k : $\underbrace{\underbrace{\{1,\dots,\ell\}^{\sum_{j<d} D_j}} \to \{1,\dots,r\}}_{\text{všech funkcí}}$

$$\boxed{D_d} > r^{\ell^{\sum_{j<i} D_j}}$$

z principu holubníku pro nějaké $z \neq y$

$f_z = f_y$ $\qquad f_z \qquad f_y$

$\overset{z}{1111\,2222}$

$11111\,222$ y

$\sigma_D := \boxed{1111}\overset{z+1}{|}***\overset{y}{|}2222$

$i < d$, máme $\boxed{\sigma_{i+1} \ldots \sigma_d}$, máme zafix.

$$D_i \left\{ \begin{array}{l} f_0^{(i)}\left(\underbrace{\boxed{\text{PREFIX}}}_{\sum_{j<i} D_j} \underbrace{\boxed{s_{i+1} \quad s_d}}_{d-i-1}\right) \\ \vdots \\ f_2^{(i)} \\ f_{D_i - 1}^{(i)} \end{array} \right. = x\left(\boxed{\text{PREFIX}} \underbrace{\overbrace{1111\,22}^{z}}_{D_i} \boxed{\overbrace{\sigma_{i+1}(s_{i+1})}^{D_{i+1}} \overbrace{\sigma_{i+2}(s_{i+2})}^{D_{i+2}} \ldots \overbrace{\sigma_d(s_d)}^{D_d}}\right)$$

D_i funkcí $\underbrace{\{1, \ldots, \ell\}^{\sum_{j<i} D_j + (d-i)} \to \{1, \ldots, r\}}$

$$r^{\ell^{\sum_{i<j} D_j + (d-i)}} < D_i$$

$$D_i \leq r^{\ell^{\sum D_j + d}}$$

$\exists f_y, f_z \quad y \neq z : \underbrace{f_y \equiv f_z}$

$y \mid y+1 \ldots z \mid z+1 \ldots D_i$

$\sigma_i := 11111 \mid ***** * \mid 222222$

$b, \tilde{b}$ dole - sousední

MÁME $\sim$
$$x[\sigma(b_1 \ldots \underbrace{b_{n} \quad 1 \quad b_{n}}_{} \ldots b_D)]$$
$$x[\sigma(\underbrace{\qquad 2 \qquad}_{})]$$

$$\sigma\left(b_1 \dots b_? \overbrace{\;1\;}^{i\text{-th' blok}} b_? \dots b_\Delta\right)$$

$$\chi\left(\tilde\sigma_1(b_1)\,\tilde\sigma_2(b_2)\dots\underbrace{11111\;2222}_{i'\text{-th' blok}}\;\tilde\sigma_{i+1}(b_{i+1})\dots\tilde\sigma_d(b_d)\right)$$

$$\chi\left(\tilde\sigma_1(b_1)\,\tilde\sigma_2(b_2)\dots\overbrace{1111\;22222}^{y}\;\tilde\sigma_{i+1}(b_{i+1})\dots\tilde\sigma_d(b_d)\right)$$

$$f_z^{(i)}\left(\underbrace{\tilde\sigma_1(b_1)\,\tilde\sigma_2(b_2)\dots\tilde\sigma_{i-1}(b_{i-1}),\,b_{i+1},\dots,b_d}\right)$$

$$f_y\left(\;\text{——}\,\|\,\text{——}\;\right)$$