Mixed strategies (Mixované strategie)

I. $\rightsquigarrow (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

II $\rightsquigarrow$ L: EU = 2.5

$\rightsquigarrow$ P: EU = 2.5

hra s $\Sigma = 0$

		II: L	II: P	
I	H ($\frac{1}{4}$)	4	1	1
	D ($\frac{3}{4}$)	2	3	2
		4	3	

II. hráč MIN SLOUPEC max řádek = 3

I. hráč MAX ŘÁDEK min sloupec = 2

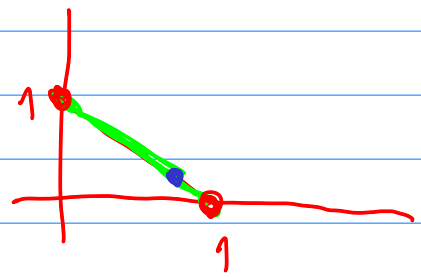
Myšlenka: $\forall$ hráč $i \longrightarrow$ strategie z S_i

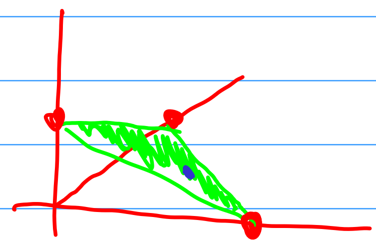
$\forall$ hráč $i \longrightarrow$ pravd. distribuci na S_i

Profil mix. strategií: $\varphi = (\sigma_1, \sigma_2)$ $\quad \sigma_i$ je prav. distribuce S_i

$$U(\varphi) = \mathbb{E}_{s \sim \sigma_1} \mathbb{E}_{t \sim \sigma_2} u(s,t) = \sum_{s \in S_1} \mathbb{P}_{\sigma_1}[s] \cdot \mathbb{P}_{\sigma_2}[t] u(s,t)$$

V našem případě: $\forall$ hráč i $|S_i|$ konečné





Pro $|S_i| = m_i \rightsquigarrow (m_i - 1)$-dim simplex v $\mathbb{R}^{m_i}$

$$\Sigma_i := \{\text{pravd. dist. na } S_i\} = \{\sigma_i : S_i \to [0,1] \;\; \sum_{S_i} \sigma_i(s) = 1\}$$

$$\Sigma := \prod_{i=1}^{N} \Sigma_i$$

mix. strategie hráčů $i \equiv \sigma_i \in \Sigma_i$

mix. profil $\equiv \sigma \in \Sigma$

hráč $i \rightsquigarrow u_i : (\prod S_i) \to \mathbb{R}$

$\searrow U_i : \Sigma \to \mathbb{R}$

$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_N)$

p. distr na S_i

$$U_i(\sigma) = \underbrace{\mathbb{E}_{\sigma}\, u_i}_{\parallel}$$

$$\sum_{s_1 \in S_1} \sum_{s_2 \in S_2} \cdots \sum_{s_n \in S_n} \mathbb{P}_{\sigma_1}(s_1)\mathbb{P}_{\sigma_2}(s_2)\dots\mathbb{P}_{\sigma_n}(s_n) \times u_i(s_1, \dots s_n)$$

Def: $G = (N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i \in N})$ hra ve strategické formě.

Mixované rozšíření G je hra $\Gamma = (N, (\Sigma_i)_{i\in N}, (U_i)_{i\in N})$

Mixované ekvilibrium $\equiv$ ekvilibrium hry Γ

čistá strategie hráče i v $\Gamma \equiv$ "triviální" p. distrib. koncentrovaná na s_i

Lemma: $G = (N, (S_i), (u_i))$ strategická hra a Γ mixované rozšíření

σ^* je ekvilibrium $\Gamma \iff \forall i$ hráče $\underbrace{U_i(\sigma^*)} \geq U_i(\sigma^*_{-i}, s_i)$

$\forall s_i \in S_i$

Dk: "$\Rightarrow$" z definice

$\Leftarrow$ uvažme lib. hráče i, lib. $\sigma_i \in \Sigma_i$

$$\underbrace{U_i(\sigma^*_{-i}, \sigma_i)} = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) \cdot \underbrace{U_i(\sigma^*_{-i}, s_i)} \leq U_i(\sigma^*) \cdot \underbrace{\sum \sigma_i}_{\substack{\parallel \\ 1}}$$

$\boxed{\text{D}}$

Věta (Nash, 50): Každá strategická hra G s konečným počtem hráčů N & $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ s konečně mnoha strategiemi má mixované ekvilibrium.

Věta (von Neumann, Min-Max Theorem 1928): Nashova věta platí pro hry dvou hráčů s nulovým součtem

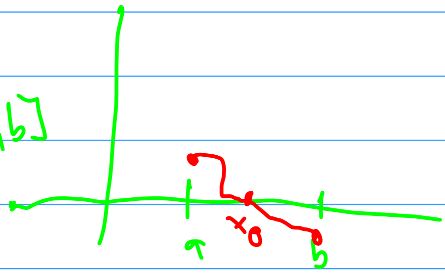
---

Fakt (Brouwerova věta o pevném bodě): Buď X konvexní a kompaktní (uzav, omez) množina v $\mathbb{R}^n$, $f: X \to X$ spojitá fce.

$$\exists x \in X: f(x) = x \leftarrow \text{pevný bod } f$$

v $n=1$:

X = interval $[a,b]$



$\boxed{\text{DŮVOD}}$, • $f(a) > a$ a • $f(b) < b$

pomocná $g(x) := f(x) - x$

$\to g(a) > 0 \qquad g(b) < 0$

g spojité $\leadsto \exists x_0 : g(x_0) = 0 \iff f(x_0) = x_0$

Dk (Nash): $D := \sum_i m_i$ kde $m_i := |S_i|$

Definujme pomocné na Σ: $g_i^j(\sigma) := \mathrm{MAX}\{0 ; u_i(\sigma_{-i}, s_i^j) - u_i(\sigma)\}$

$i \in \{1, \dots, N\}$

$j \in \{1, \dots, m_i\}$

σ je ekvilibrium $\iff g_i^j(\sigma) = 0 \quad \forall i, j$

$f : \Sigma \to \mathbb{R}^D$ $\qquad \Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \dots \times \Sigma_N$

složíme z $f_1 - f_i \dots f_N$ $\qquad \Sigma_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$

složíme z $f_i^1, f_i^2 \dots f_i^{m_i}$

$f_i^j : \Sigma \to \mathbb{R}$ $\qquad f_i^j(\sigma) \sim \sigma_i(s_i^j) + g_i^j(\sigma)$

$\sigma \in \Sigma$

$= (\sigma_1 \dots \sigma_N)$

$$\boxed{f_i^j(\sigma) := \frac{\sigma_i(s_i^j) + g_i^j(\sigma)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_i^k(\sigma)}}$$

DCV: $\mathrm{Image}(f) \subseteq \Sigma \equiv \underbrace{f : \Sigma \to \Sigma}$

Tvrzení 1: σ je pevný bod f, tak σ je ekvilibrium

Tvrzení 2: Pro σ pevný bod f platí:

$$\forall i, \forall j : \boxed{g_i^j(\sigma) = \sigma_i(s_i^j) \times \sum_{k=1}^{m_i} g_i^k(\sigma)}$$

Dk (2): σ pevný bod $\to$ $f_i^j(\sigma) = \sigma_i(s_i^j)$ $\forall i, j$

$$\cancel{\sigma_i(s_i^j)} + g_i^j(\sigma) = \sigma_i(s_i^j) \cdot \left(\cancel{1} + \sum_{k=1}^{m_i} g_i^k(\sigma)\right)$$

Dk (1): Buď σ pevný bod. Pro spor, $\underbrace{\sigma \text{ není ekvilibrium}}$

$\Updownarrow$

$g_i^j(\sigma) > 0$ pro nějaké $\boxed{i}$ & nějaké j

👁 $\sigma_i(s_i^k) > 0 \iff g_i^k(\sigma) > 0$ z tvrzení 2

z def,

$$\sum_{k=1}^{m_i} \sigma_i(s_i^k) \cdot U_i(\sigma) = U_i(\sigma) = \sum_{k=1}^{m_i} \sigma_i(s_i^k) \cdot U_i(\sigma_{-i}, s_i^k)$$

$$\emptyset = \underbrace{U_i(\sigma)} - \sum_{k=1}^{m_i} \sigma_i(s_i^k) \cdot U_i(\sigma_{-i}, s_i^k)$$

$$= \sum_{k=1}^{m_i} \underbrace{\sigma_i(s_i^k)} \left[U_i(\sigma) - U_i(\sigma_{-i}, s_i^k) \right]$$

$$= -\sum_{k:\, \sigma_i(s_i^k) > 0} \sigma_i(s_i^k) \times \left(g_i^k(\sigma) \right) < \emptyset$$

$\lightning$ ☒

VÍME: $k = j$ $\uparrow$ $\sigma_i(s_i^j) > 0$