Teorie her

LS 2024/25, FJFI ČVUT

1. domácí úlohy

1a) Popište vyhrávající strategii prvního hráčě ve hře $3 \times 3 \times 3$ piškvorky.

Připomeňme, že popis vyhrávající strategie musí 1. hráči vybrat odpověď na libovolný tah protihráče.

1b) Zkonstruujte 2-obarvení $3 \times 3 \times 3$, které <u>nemá</u> žádnou monochromatickou kombinatorickou přímku.

2) Pro každé přirozené číslo $r \geq 2$ zkonstruujte r-obarvení $\{1,2\}^{r-1}$ takové, že neobsahuje žádnou monochromatickou kombinatorickou přímku.

3) Dokažte, že každé 2-obarvení $3 \times 3 \times 3 \times 3$ obsahuje monochromatickou kombinatorickou přímku.

$\star$) Dokažte tzv. van der Wardenovu větu o monochromatických aritmetických posloupnostech: pro každé $r, k \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ takové že libovolné r-obarvení $\chi : \{1, \ldots, N\} \to \{1, \ldots, r\}$ obsahuje monochromatickou *aritmetickou posloupnost* délky k. Jinými slovy, existují nějaká kladná $c, d \in \mathbb{N}$ taková, že

$$c + (k-1)d \leq N \qquad \text{a} \qquad \chi(c) = \chi(c+d) = \chi(c+2d) = \cdots = \chi(c+(k-1)d).$$