Teorie grafů

ZS 2022/23, FJFI ČVUT

2. domací úlohy

Deadline: 20.10.2022 23:59:59 středoevropského času

– –

1a) Pro každé n a $k \leq n$ určete (a následně dokažte!) <u>minimální</u> počet hran grafu s n vrcholy a k komponentami souvislosti.

1b) Pro každé n a $k \leq n$ určete (a následně dokažte!) <u>maximální</u> počet hran grafu s n vrcholy a k komponentami souvislosti.

2) Nechť $T = (V, E)$ je strom obsahující vrchol stupně $k \geq 3$. Dokažte, že T má alespoň k listů.

3) Buď $G = (V, E)$ graf. Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:

   (a) G je strom.

   (b) G neobsahuje kružnici a $|V| = |E| + 1$.

   (c) G je souvislý a každá jeho hrana je most (tzn. G je $\subseteq$-minimální souvislý graf).

4a) Dokažte, že pro posloupnost $n \geq 2$ celých čísel $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ jsou následující dvě podmínky ekvivalentní:

   (a) Existuje strom, který má skóre $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

   (b) $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$.

4b) Určete všechna $n \geq 3$, pro která existuje nějaký graf s minimálním stupněm 1, který není strom, nicméně jeho skóre $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ splňuje $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$.

5) Nechť K_n^- je (až na izomorfismus jednoznačně určený) graf s n vrcholy a $\binom{n}{2} - 1$ hranami. Pro každé $n \geq 3$, určete počet koster K_n^-.

$\star$) Dokažte, že počet neizomorfních stromů s n vrcholy je nejvýše 4^n.