

### 3. domácí úlohy

Deadline: 27.10.2022 23:59:59 středoevropského času

-----

- 1a) Buď  $G = (V, E)$   $k$ -regulární bipartitní graf s částmi  $L$  a  $R$ . Dokažte, že  $|L| = |R|$ .
- 1b) Buď  $G = (V, E)$  bipartitní graf s maximálním stupněm  $\Delta(G) = k$ . Dokažte, že existuje  $k$ -regulární bipartitní graf  $H$ , který obsahuje  $G$  jako indukovaný podgraf.
- 2) Nalezněte všechny bipartitní grafy  $G$ , jejichž doplněk  $\bar{G}$  je též bipartitní.
- 3) Pro graf  $G = (V, E)$ , označme  $g(G)$  délku nejkratšího cyklu, který  $G$  obsahuje; pokud je  $G$  acyklický, definujeme  $g(G) := \infty$ . Poznamenejme, že parametru  $g(G)$  se také říká *obvod grafu*.  
Buď  $d \geq 3$  a  $r \geq 2$  pevné a  $G = (V, E)$  libovolný  $d$ -regulární graf. Dokažte, že
  - (a) pokud  $g(G) = 2r - 1$ , tak  $|V| \geq \frac{d(d-1)^{r-1}-2}{d-2}$ , a
  - (b) pokud  $g(G) = 2r$ , tak  $|V| \geq \frac{2(d-1)^r-2}{d-2}$ .
- 4) Pro graf  $G = (V, E)$  označme *průměrem grafu* maximální délku nejkratší cesty mezi nějakými dvěma vrcholy, tzn.  $\max_{u,v \in V} \text{dist}_G(u, v)$ .  
Dokažte, že má-li graf průměr alespoň 4, tak jeho doplněk má průměr nejvýše 2.
- 5) Připomeňme, že pro graf  $G = (V, E)$  nazveme hranu  $e \in E$  *mostem*, jestliže podgraf  $(V, E \setminus \{e\})$  má více komponent souvislosti než  $G$ . Analogicky nazveme vrchol  $v \in V$  *artikulací*, jestliže indukovaný podgraf množinou  $V \setminus \{v\}$  má více komponent souvislosti než  $G$ .
  - a) Dokažte, že každý  $2k$ -regulární graf neobsahuje most.
  - b) Dokažte, že každý  $k$ -regulární bipartitní graf neobsahuje artikulaci.
- \*) Buď  $G = (V, E)$  s minimálním stupněm  $\delta(G) > \frac{2}{5} \cdot |V|$ . Dokažte, že  $G$  je buď bipartitní, nebo obsahuje cyklus délky 3. Dále zkonstruujte nekonečně mnoho neizomorfních grafů  $G = (V, E)$ , které nejsou bipartitní, neobsahují cyklus délky 3 a splňují  $\delta(G) = \frac{2}{5} \cdot |V|$ .