Teorie grafů

ZS 2022/23, FJFI ČVUT

4. domací úlohy

Deadline: 3.11.2022 23:59:59 středoevropského času

– –

1a) Buď $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že každý 2^{k+1}-regulární graf $G = (V, E)$ obsahuje faktor $H = (V, F)$, který je 2^k-regulární.

1b) Dokažte, že množinu hran libovolného 2^{k+1}-regulárního grafu $G = (V, E)$ lze rozdělit na 2^k disjunktních částí $F_1, F_2, \dots, F_{2^k}$ tak, že $H_i = (V, F_i)$ je 2-regulární graf pro každé $i \in [2^k]$.

2) Pro každé $k \geq 2$, přesně charakterizujte grafy $G = (V, E)$ bez izolovaných vrcholů, které lze "nakreslit" pomocí k tahů. Jinými slovy, existuje k hranově disjunktních tahů $T_1, \dots, T_k$ v G takových, že součet délek těchto tahů je roven $|E|$.

3) Buď $G = (V, E)$ graf. Uvažme nyní následující proceduru:

- $G_0 := G$ a $i := 0$
- DOKUD $\exists \{x, y\} \in \binom{V}{2}$ t.ž. $\{x, y\} \notin E(G_i)$ & $\deg_{G_i}(x) + \deg_{G_i}(y) \geq n$, OPAKUJ:
  $G_{i+1} := (V, E(G_i) \cup \{\{x, y\}\})$ a $i := i + 1$
- $[G] := G_i$

3a) Dokažte, že $[G]$ je definováno jednoznačně, neboli ať v jednotlivých krocích algoritmus vybírá dvojici vrcholů x a y jakkoliv, výsledek $[G]$ je vždy stejný.

3b) Dokažte, že G je Hamiltonovský právě tehdy když $[G]$ je Hamilotnovský.

4) Pro všechna $a \in \mathbb{N}$ a $b \in \mathbb{N}$ spočtěte počet koster úplného bipartitního grafu $K_{a,b}$.

Poznámka: můžete použít zatím na přednášce nedokázanou Kirchoffovu větu.

5a) Buď G graf s n vrcholy a spektrem $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Dokažte, že G je bipartitní právě tehdy když $\lambda_i = -\lambda_{n-i+1}$ pro každé $i \in [n]$.

5b) Buď G souvislý graf s maximálním stupněm D, a nechť spektrum G má největší vlastní číslo λ_1. Dokažte, že $D = \lambda_1$ právě tehdy když G je D-regulární.

$\star$) Buď $G = ([n], E)$ graf, L_G jeho Laplaceova matice, a $i, j \in [n]$. Dokažte, že

$$\det\left(L_G^{(i,j)}\right) = (-1)^{i+j} \cdot \det\left(L_G^{(1,1)}\right).$$