Teorie grafů

ZS 2022/23, FJFI ČVUT

5. domací úlohy

Deadline: 18.11.2022 23:59:59 středoevropského času

Buď $G = (V, E)$ graf. Připomeňme z přednášky relaci $\sim_B$ na množině hran E, kde $e \sim_B f$ jestliže $e = f$ nebo e a f leží na nějaké společné kružnici v G. Již víme, že $\sim_B$ je ekvivalence a její třídy nazýváme *bloky grafu* G. Nechť k je počet tříd ekvivalence $\sim_B$ a

$$B_1 \dot{\bigcup} \cdots \dot{\bigcup} B_k$$

je rozklad E na příslušné bloky. P položme $V_i := \bigcup_{e \in B_i} e$ pro každé $i \in [k]$, jinými slovy, nechť V_i jsou přesně vrcholy, jež jsou koncem nějaké hrany z B_i.

1a) Dokažte, že $|V_i \cap V_j| \leq 1$ pro každé $i \neq j$.

1b) Dokažte, že $v \in V$ leží ve dvou ruzných množinách V_i a V_j právě tehdy když v je artikulace G.

2) Buď $G = (V, E)$ 3-regularní graf. Dokažte, že $\kappa(G) = \kappa'(G)$.

3) Pro každou dvojici přirozených čísel k a ℓ splňujících $\ell \geq k \geq 1$ zkonstruujte nekonečně mnoho grafů s $\kappa(G) = k$ a $\kappa'(G) = \ell$.

4a) Buď $G = (V, E)$ k-souvislý graf, $X \subseteq V$ velikosti k a $y \in V \setminus X$. Dokažte, že G obsahuje k cest $P_1, \ldots, P_k$ takových, že jeden konec každé cesty je y a druhý leží v X, a pro každé $i \neq j$ platí $V(P_i) \cap V(P_j) = \{y\}$.

4b) Buď $k \geq 2$, $G = (V, E)$ k-souvislý graf a $X \subseteq V$ velikosti k. Dokažte, že G obsahuje kružnici C na které leží všechny vrcholy X (jinými slovy, $X \subseteq V(C)$).

Orientací (neorientovaného) grafu $G = (V, E)$ rozumíme libovolné zobrazení $o : E \to V$ splňující $o(e) \in e$ pro každé $e \in E$. Nazvěme orientaci G *silně souvislou* jestliže v orientovaném grafu (V, E, o) existuje orientovaná cesta mezi každou dvojicí jeho vrcholů.

5a) Dokažte, že každý 2-souvislý graf má silně souvislou orientaci.

5b) Dokažte, že každý hranově 2-souvislý graf má silně souvislou orientaci.

$\star$) Dokažte, že každý 3-souvislý graf $G = (V, E)$ s $|V| \geq 5$ obsahuje nějakou hranu $e \in E$ takovou, že graf získaný z G kontrakcí hrany e a následným odstraněním případných násobných hran je opět 3-souvislý.