Teorie grafů

ZS 2022/23, FJFI ČVUT

6. domací úlohy

Deadline: 24.11.2022 23:59:59 středoevropského času

---

1) Buď $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že každý $2k$-regulární graf $G = (V, E)$ obsahuje faktor $H = (V, F)$, který je 2-regulární.

2) Čtvercovou matici $n \times n$, kde každá buňka obsahuje přirozené číslo mezi 1 a n, nazvěme *latinským čtvercem* jestliže v každém řádku je každé číslo právě jednou, a v každém sloupci je každé číslo právě jednou. Podobně *latinský obdélník* značí matici s rozměry $m \times n$, kde každá buňka obsahuje přirozené číslo mezi 1 a n, v každém řádku najdeme každé číslo právě jednou, a v každém sloupci najdeme každé číslo nejvýše jednou.

   Dokažte, že každý latinský obdelník s m řádky lze doplnit o $n - m$ nových řádků tak, že výsledná $n \times n$ matice je latinský čtverec.

3 Buď G bipartitní graf s partitami A a B. Dokažte, že

$$\min_{S \subseteq A} |A| - |S| + |N_G(S)| = \nu(G) = \min_{T \subseteq B} |B| - |T| + |N_G(T)|.$$

Buď $G = (V, E)$ 3-regulární graf bez mostů.

4a) Dokažte, že pro každou $e \in E$ existuje v G perfektní párování M t.ž. $e \in M$.

4b) Dokažte, že pro každou $f \in E$ existuje v G perfektní párování M t.ž. $f \notin M$.

4⋆) "labužnická varianta" okamžitě implikující 4a i 4b: Dokažte, že pro každé dvě hrany $f_1 \in E$ a $f_2 \in E$ existuje v G perfektní párovaní M t.ž. $\{f_1, f_2\} \cap M = \emptyset$.

5) Pro každé $n \geq 2$ sudé explicitně zkonstruujte $n-1$ po dvou disjunktních perfektních párování K_n. Jinymí slovy, dokažte, že

$$E(K_n) = M_! \cup M_2 \cdots \cup M_{n-1}\,, \qquad \text{kde } M_i \text{ je perfektní párování } \forall i \in [n-1].$$

⋆) Buď $k \geq 2$ pevné přirozené číslo. Najděte obecnou explicitní konstrukci, která pro daný graf G s minimálním stupněm $\delta(G) \geq k$ zkonstruuje pomocný graf G_k takový, že platí následující:

$$G \text{ obsahuje } k\text{-regulární faktor} \iff G_k \text{ má perfektní párováni.}$$