Teorie grafů

ZS 2022/23, FJFI ČVUT

7. domací úlohy

Deadline: 1.12.2022 23:59:59 středoevropského času

– –

1a) Dokažte, že je-li 3-regulární graf Hamiltonovský, tak potom je hranově 3-obarvitelný. *(Čistě mezi řečí — co to říká o Hamiltonovskosti Petersenova grafu?)*

1b) Zkonstruujte nekonečně mnoho 3-regulárních 2-souvislých grafů, které jsou hranově 3-obarvitelné a zároveň nejsou Hamiltonovské.

O grafu $G = (V, E)$ řekneme, že je *k-kritický*, jestliže $\chi(G) = k$, nicméně libovolný vlastní podgraf $H \subsetneq G$, tzn. podgraf H, který je různý od G, splňuje $\chi(H) < \chi(G)$.

2a) Zkonstruujte všechny 2-kritické a 3-kritické grafy.

2b) Dokažte, že k-kritický graf má minimální stupeň $\delta(G) \geq k - 1$.

Pro digraf D označme $\ell_P(D)$ délku nejdelší orientované cesty v D.

3) Buď $G = (V, E)$ neorientovaný graf. Dokažte, že

$$\chi(G) = \min_{\vec{G} \text{ orientace hran } G} \ell_P(\vec{G}) + 1.$$

4a) Buď $G = (V, E)$ graf a $\overline{G}$ jeho doplňek. Dokažte, že $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \geq |V|$.

4b) Buď $G = (V, E)$ graf neobsahující trojúhelník a označme $\nu(G)$ velikost největšího párování v G. Dokažte, že $\nu(G) + \chi(\overline{G}) = |V|$.

5) Buď $G = (V, E)$ graf takový, že každé dva liché cykly v G mají společný alespoň jeden vrchol. Dokažte, že $\chi(G) \leq 5$.

$\star$) Dokažte, např. zobecněním důkazu z přednášky, následující variantu Vizingovy věty pro multigrafy: Je-li G multigraf s maximální násobností hrany μ a s maximálním stupněm vrcholu Δ, potom $\chi'(G) \leq \Delta + \mu$.