Teorie grafů

ZS 2022/23, FJFI ČVUT

8. domací úlohy

Deadline: 8.12.2022 23:59:59 středoevropského času

– –

1) Dokažte, že každý graf $G = (V, E)$ s minimálním stupněm $\delta(G) \geq 1$ má dominující množinu velikosti nejvýše $\left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor$.
(Jen mezi řečí — to dává pro $\delta \leq 5$ lepší výsledek než věta z přednášky!)

2a) Najděte funkci $n_M(k)$ takovou, že k-tý člen Mycelského posloupnosti grafů má $\Theta\left(n_M(k)\right)$ vrcholů.

2b) Najděte funkci $n_E(k)$ takovou, že graf bez trojúhelníku ($g = 3$) s barevností alespoň k zkonstruovaný v důkazu Erdősovy věty má $\Theta\left(n_E(k)\right)$ vrcholů.
Připomeňme, že $n(k) = \Theta(f(k))$ jestliže existují kladné konstanty C a c splňující $c \cdot f(k) \leq n(k) \leq C \cdot f(k)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

3) Dokažte, že každý graf $G = (V, E)$ obsahuje bipartitní faktor $H = (V, F)$ takový, že $|F| \geq |E|/2$ a zároveň velikosti partit H jsou $\left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor$ a $\left\lceil \frac{|V|}{2} \right\rceil$.

Buď V libovolná konečná množina a $\ell \in [|V|]$. *ℓ-uniformním hypergrafem* nazvěme dvojici (V, M) kde M je nějaká kolekce ℓ-prvkových podmnožin $|V|$, neboli $M \subseteq \binom{V}{\ell}$. Všimněme si, že 2-uniformní hypergraf je totéž co graf. Ještě dodejme, že prvkům M se běžně říká *hyperhrany.*

4) Nechť $H = (V, M)$ je ℓ-uniformní hypergraf s $|M| \leq 2^{\ell-1}$. Dokažte existenci množiny $W \subseteq V$ takové, že pro každou hyperhranu $e \in M$ platí:

$$e \cap W \neq \emptyset \quad \text{a} \quad e \setminus W \neq \emptyset\,.$$

5) Buď $G_{n,p}$ náhodný graf s n vrcholy a pravděpodobností hrany $p = p(n) > 0$. Poznamenejme, že pravděpodobnost p může záviset na n. Nyní si jako $q(n)$ označme pravděpodobnost, že $\alpha\left(G_{n,p}\right) > \left\lceil \frac{2 \ln n}{p} \right\rceil$. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} q(n) = 0$.

$\star$) Buď $G = (V, E)$ graf. Dokažte, že

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{\deg_G(v) + 1}\,.$$