Teorie grafů

ZS 2022/23, FJFI ČVUT

10. domací úlohy

Deadline: 22.12.2022 23:59:59 středoevropského času

– –

1. Připomeňme, že $R_r(3) := R_r^{(2)}(3)$ značí minimální n takové, že každé obravení $c : E(K_n) \to [r]$ obsahuje monochromatické K_3. Dokažte, že pro každé $r \in \mathbb{N}$ platí
$$2^r < R_r(3) \leq 3 \cdot r!$$

2. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme pomocí $\mathcal{P}([n])$ potenční množinu $[n]$, neboli kolekci všech podmnožin $[n]$. Dokažte, že pro každé $r \in \mathbb{N}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $c : \mathcal{P}([n]) \to [r]$ existují dvě neprázdné disjunktní množiny A a B takové, že
$$c(A) = c(B) = c(A \cup B)$$

3. Dokažte, že pro každé $m \geq 3$ existuje $p_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé prvočíslo $p > p_0$ má následující rovnice netriviální (x, y i z jsou nenulové) řešení:
$$x^m + y^m \equiv z^m \mod p$$
Pozor, toto není ve sporu s velkou Fermatovou větou!

4. Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že libovolných n bodů v rovině v obecné poloze obsahuje k bodů, jež tvoří vrcholy konvexního k-úhelníku.

5. Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ a $p \in [0, 1]$ dokažte, že
$$R(k) > n - \binom{n}{k} \cdot \left(p^{\binom{k}{2}} + (1-p)^{\binom{k}{2}}\right)$$

$\star$) Pro každé $\ell \in \mathbb{N}$, $k \geq \ell$ a $r \in \mathbb{N}$ dokažte, že existuje $d > 0$ s následující vlastností: Pro libovolné obarvení $c : E(K_n^\ell) \to [r]$ existuje $\mathcal{Z}_c \subseteq \binom{[n]}{k}$ velikosti $\lfloor d \cdot n^k \rfloor$ takové, že pro každé $Z \in \mathcal{Z}_c$ mají všechny hyperhrany $e \in \binom{Z}{\ell}$ v obarvení c stejnou barvu.