Teorie grafů

ZS 2022/23, FJFI ČVUT

11. domací úlohy

Deadline: 2.2.2023 23:59:59 středoevropského času

− −

Pro graf $G = (V, E)$ definujme $t(G)$ jako počet trojúhelníků v G, tzn. počet trojic $\{x, y, z\} \in \binom{V}{3}$ takových, že $G[\{x, y, z\}]$ je úplný.

1. Buď $G = (V, E)$ graf s $|V| = n$, a nechť $\check{c}$ značí počet trojic vrcholů $\{x, y, z\}$ takových, že $G[\{x, y, z\}]$ má přesně jednu hranu. Dokažte, že

$$\sum_{v \in V} \left(\frac{n}{2} - \deg_G(v) \right)^2 - 3 \cdot t(G) + \check{c} = n \cdot \left(\frac{n^2}{4} - |E| \right).$$

   Co z toho plyne pro počet hran v grafech bez podgrafu K_3?

2. Buď $G = (V, E)$ graf s $|V| = n$. Dokažte, že $3n \cdot t(G) \geq |E| \cdot \left(4|E| - n^2\right)$.

   Co z toho plyne pro počet hran v grafech bez podgrafu K_3?

3. Buď $G = (V, E)$ graf s $|V| = n$. Dokažte, že počet čtveřic vrcholů $\{a, b, c, d\}$ takových, že $G[\{a, b, c, d\}] \cong K_4$, je alespoň

$$\frac{1}{6n^2} \cdot |E| \cdot \left(4|E| - n^2\right) \cdot \left(3|E| - n^2\right).$$

   Co z toho plyne pro počet hran v grafech bez podgrafu K_4?

4. Buď $G = (V, E)$ graf s $|V| = n$ a $|E| = \lfloor n^2/4 \rfloor + 1$. Dokažte, že $t(G) \geq \lfloor n/2 \rfloor$.

5. Buď $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ libovolná množina n bodů v $\mathbb{R}^2$. Ukažte, že počet dvojic $\{i, j\}$ takových, že $\|p_i - p_j\| = 1$ je $O\left(n^{3/2}\right)$.

$\star$) Pro každé $s \geq 2$ a $t \geq 2$ najděte $c > 0$ takové, že existuje graf $G = (V, E)$ s $|V| = n$, který neobsahuje $K_{s,t}$ jako podgraf, a jeho počet hran splňuje

$$|E| \geq c \cdot n^{2 - \frac{s+t-2}{st-1}}.$$