

Teorie grafů
ZS 2023/24, FJFI ČVUT

1. domácí úlohy

Deadline: 10.10.2023 23:59:59 středoevropského (letního) času

- 1) Graf nazvěme *asymetrickým* obsahuje-li jeho grupa automorfismů pouze identitu. Zkonstruujte nekonečně mnoho navzájem neisomorfních asymetrických grafů.
- 2) Pro daný graf $G = (V, E)$, uvažujme následující relaci \rightsquigarrow na V : pro dva (ne nutně různé) vrcholy $u, w \in V$ řekneme, že u je v relaci s w , tzn. $u \rightsquigarrow w$, jestliže existuje cesta v G z u do w . Dokažte, že \rightsquigarrow je ekvivalence na V .
- 3a) Dokažte, že každý graf G s alespoň dvěma vrcholy obsahuje dvojici různých vrcholů se stejným stupněm. Jinými slovy, $\exists u, w \in V(G)$ t.ž. $u \neq w$ a $\deg_G(u) = \deg_G(w)$.
- 3b) Buď δ přirozené číslo. Dokažte, že každý nenulový graf, kde každý vrchol má stupeň alespoň δ , obsahuje cestu s δ hranami.
- 4) Nazvěme graf G *doplňkem sebe sama* platí-li, že G je isomorfní svému doplňku \overline{G} . Zkonstruujte nekonečně mnoho navzájem neisomorfních grafů G jež jsou doplňkem sebe sama.
- 5) Graf nazvěme *d-regulárním*, jestliže všechny jeho vrcholy mají stupeň přesně d . Určete všechny dvojice čísel n a d , kde $0 \leq d \leq n-1$, takové, že existuje d -regulární graf s n vrcholy.