Teorie grafů

ZS 2023/24, FJFI ČVUT

2. domací úlohy

Deadline: 17.10.2023 23:59:59 středoevropského (letního) času

---

Pro daný graf $G = (V, E)$ budeme značit $\delta(G)$ tzv. *minimální stupeň grafu*, který je definován jako nejmenší stupeň některého z vrcholů G, neboli

$$\delta(G) := \min_{v \in V} \deg_G(v).$$

1a) Pro každé přirozené $\delta \geq 1$ dokažte, že souvislý graf $G = (V, E)$ s $\delta(G) = \delta$ obsahuje cestu s $\min\{2\delta, |V| - 1\}$ hranami.

1b) Pro každé přirozené $\delta \geq 1$ zkonstruujte nekonečně velkou množinu grafů $\mathcal{G}_\delta$ takovou, že každý $G \in \mathcal{G}_\delta$ je souvislý, má $\delta(G) = \delta$ a zároveň G neobsahuje cestu s $2\delta + 1$ hranami.

2a) Pro každé n a $k \leq n$ určete (a následně dokažte!) minimální počet hran grafu s n vrcholy a k komponentami souvislosti.

2b) Pro každé n a $k \leq n$ určete (a následně dokažte!) maximální počet hran grafu s n vrcholy a k komponentami souvislosti.

3a) Nechť $T = (V, E)$ je strom obsahující vrchol stupně $k \geq 3$. Dokažte, že T má alespoň k listů.

3b) Buď $G = (V, E)$ graf. Dokažte, že následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(a) G je strom.

(b) G neobsahuje kružnici a $|V| = |E| + 1$.

4) Dokažte, že pro posloupnost $n \geq 2$ celých čísel $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ jsou následující dvě podmínky ekvivalentní:

(a) Existuje strom, který má skóre $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

(b) $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$.

5) Nechť K_n^- je (až na izomorfismus jednoznačně určený) graf s n vrcholy a $\binom{n}{2} - 1$ hranami. Určete počet koster K_n^- pro každé $n \geq 3$.