Teorie grafů

ZS 2023/24, FJFI ČVUT

3. domací úlohy

Deadline: 24.10.2023 23:59:59 středoevropského času

1a) Buď $G = (V, E)$ k-regulární bipartitní graf s částmi L a R. Dokažte, že $|L| = |R|$.

1b) Nalezněte, až na isomorfismus, všechny bipartitní grafy G, jejichž doplněk $\overline{G}$ je též bipartitní.

2) Pro graf $G = (V, E)$ označme *průměrem* G maximální délku nejkratší cesty mezi nějakými dvěma vrcholy, tzn. $\max\limits_{u,v \in V} \mathrm{dist}_G(u, v)$. Dokažte, že má-li graf průměr alespoň 4, tak jeho doplněk má průměr nejvýše 2.

3) Pro graf $G = (V, E)$, označme $g(G)$ délku nejkratšího cyklu, který G obsahuje; pokud je G acyklický, definujeme $g(G) := \infty$. Poznamenejme, že parametru $g(G)$ se také říká *obvod grafu.*

   Buď $d \geq 3$ a $r \geq 2$ pevné a $G = (V, E)$ libovolný d-regulární graf. Dokažte:

   (a) Je-li $g(G) = 2r$, tak potom $|V| \geq \frac{2(d-1)^r - 2}{d-2}$.

   (b) Je-li $g(G) = 2r + 1$, tak potom $|V| \geq \frac{d(d-1)^r - 2}{d-2}$.

4) Připomeňme, že pro graf $G = (V, E)$ nazveme hranu $e \in E$ *mostem*, jestliže podgraf $(V, E \setminus \{e\})$ má více komponent souvislosti než G. Analogicky nazveme vrchol $v \in V$ *artikulací*, jestliže indukovaný podgraf množinou $V \setminus \{v\}$ má více komponent souvislosti než G.

4a) Dokažte, že každý $2k$-regulární graf neobsahuje most.

4b) Dokažte, že každý k-regulární bipartitní graf neobsahuje artikulaci.

5a) Buď $G = (V, E)$ neprázdný graf, a buď $d := \frac{|E|}{|V|}$. Dokažte, že G obsahuje indukovaný podgraf H splňující $\delta(H) > d$.

   (*Hint: zkuste z G postupně odebírat vrcholy stupně nejvýše d.*)

5b) Pro každé přirozené $d \geq 1$ a každé $\varepsilon \in (0, 1)$ zkonstruujte graf $G_{d,\varepsilon} = (V, E)$ takový, že splňuje $\frac{|E|}{|V|} > d - \varepsilon$ a zároveň $\delta(H) \leq d$ pro každý podgraf $H \subseteq G_{d,\varepsilon}$.