Teorie grafů

ZS 2023/24, FJFI ČVUT

4. domácí úlohy

Deadline: 1.11.2023 11:59:59 středoevropského zimního času

\- -

1a) Buď $G = (V, E)$ graf s n vrcholy a spektrem $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Dokažte, že

$$\sum_{i \in [n]} (\lambda_i)^2 = 2|E|.$$

1b) Buď G souvislý graf s maximálním stupněm D, a nechť spektrum G má největší vlastní číslo λ_1. Dokažte, že $D = \lambda_1$ právě tehdy když G je D-regulární.

2) Buď G graf s n vrcholy a spektrem $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Dokažte, že G je bipartitní právě tehdy když $\lambda_i = -\lambda_{n-i+1}$ pro každé $i \in [n]$.

3) Realnou matici M nazvěme totálně unimodulární, jestliže všechny její čtvercové podmatice M' splňují $\det M' \in \{-1, 0, 1\}$. Dokažte, že graf G je bipartitní právě tehdy když jeho matice incidence B_G je totálně unimodulární.

4a) Buď $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Dokažte, že každý 2^{k+1}-regulární graf $G = (V, E)$ obsahuje faktor $H = (V, F)$, který je 2^k-regulární.

4b) Dokažte, že množinu hran libovolného 2^{k+1}-regulárního grafu $G = (V, E)$ lze rozdělit na 2^k disjunktních částí $F_1, F_2, \ldots, F_{2^k}$ tak, že graf (V, F_i) je 2-regulární pro všechna $i \in [2^k]$.

5) Pro každé $k \geq 2$, nalezněte charakterizující podmínku pro souvislé multigrafy $G = (V, E_M)$, které lze "nakreslit" pomocí k tahů, a zároveň $k-1$ či méně tahů nestačí. Jinými slovy, v G existuje k hranově disjunktních tahů $T_1, \ldots, T_k$ takových, že součet jejich délek je roven $|E_M|$, a zároveň v G neexistuje $\leq k-1$ hranově disjunktních tahů, jejichž délky se sčítají na $|E_M|$.

(Hint: inspirujte se větou z přednášky pro $k = 1$.)