Teorie grafů

ZS 2023/24, FJFI ČVUT

5. domácí úlohy

Deadline: 15.11.2022 11:59:59 středoevropského zimního času

– –

1) Buď $G = (V, E)$ graf. Připomeňme z přednášky relaci $\sim_B$ na množině hran E, kde $e \sim_B f$ jestliže $e = f$ nebo e a f leží na nějakém společném cyklu v G. Již víme, že $\sim_B$ je ekvivalence a její třídy nazýváme *bloky grafu* G. Nechť k je počet tříd ekvivalence $\sim_B$ a

$$B_1 \dot{\bigcup} \cdots \dot{\bigcup} B_k$$

je rozklad E na příslušné bloky. P položme $V_i := \bigcup_{e \in B_i} e$ pro každé $i \in [k]$, jinými slovy, nechť V_i jsou přesně ty vrcholy, jež jsou koncem nějaké hrany z B_i.

1a) Dokažte, že $|V_i \cap V_j| \leq 1$ pro každé $i \neq j$.

1b) Dokažte, že $v \in V$ leží ve dvou ruzných množinách V_i a V_j právě tehdy když v je artikulace G.

2a) Pro každou dvojici přirozených čísel k a ℓ splňujících $\ell \geq k \geq 1$ zkonstruujte nekonečně mnoho grafů s $\kappa(G) = k$ a $\kappa'(G) = \ell$.

2b) Buď $G = (V, E)$ 3-regulární graf. Dokažte, že $\kappa(G) = \kappa'(G)$.

3) Buď G graf, který je 3-souvislý a obsahuje alespoň jeden lichý cyklus (jako podgraf). Dokažte, že G obsahuje alespoň čtyři různé liché cykly (opět jako podgrafy).

4a) Buď $G = (V, E)$ k-souvislý graf, $X \subseteq V$ velikosti k a $y \in V \setminus X$. Dokažte, že G obsahuje k cest $P_1, \ldots, P_k$ takových, že jeden konec každé cesty je y a druhý leží v X, a pro každé $i \neq j$ platí, že $V(P_i) \cap V(P_j) = \{y\}$.

4b) Buď $k \geq 2$, $G = (V, E)$ k-souvislý graf a $X \subseteq V$ velikosti k. Dokažte, že G obsahuje cyklus C, na kterém leží všechny vrcholy X (jinými slovy, $X \subseteq V(C)$).

5) Orientací (neorientovaného) grafu $G = (V, E)$ rozumíme libovolné zobrazení $o : E \to V$ splňující $o(e) \in e$ pro každé $e \in E$. Orientaci grafu interpretujeme tak, že každá hrana e získala svůj *start*, který odpovídá vrcholu $o(e)$, a *cíl*, který odpovídá opačnému konci e než je $o(e)$.

Orientaci grafu nazveme *silně souvislou* jestliže v příslušném orientovaném grafu (V, E, o) pro každou uspořádanou dvojicí jeho vrcholů u a w existuje *orientovaná cesta* z u do w, tj. cesta $u = v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k = w$, kde $\{v_0, \ldots, v_k\} \subseteq V$, $\{e_1, \ldots, e_k\} \subseteq E$, a $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ splňující $o(e_i) = v_{i-1}$ pro každé $i \in [k]$.

5a) Dokažte, že každý vrcholově-2-souvislý graf má silně souvislou orientaci.

5b) Dokažte, že každý hranově-2-souvislý graf má silně souvislou orientaci.