Teorie grafů

ZS 2023/24, FJFI ČVUT

6. domácí úlohy

Deadline: neexistuje, určeno jen jako příprava na zkoušku.

– –

1) Buď $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že každý $2k$-regulární graf $G = (V, E)$ obsahuje faktor $H = (V, F)$, který je 2-regulární.

2) Čtvercovou matici $n \times n$, kde každá buňka obsahuje přirozené číslo mezi 1 a n, nazvěme *latinským čtvercem* jestliže v každém řádku je každé číslo právě jednou, a v každém sloupci je každé číslo právě jednou. Podobně *latinský obdélník* značí matici s rozměry $m \times n$, kde každá buňka obsahuje přirozené číslo mezi 1 a n, v každém řádku najdeme každé číslo právě jednou, a v každém sloupci najdeme každé číslo nejvýše jednou.

   Dokažte, že každý latinský obdelník s m řádky lze doplnit o $n - m$ nových řádků tak, že výsledná $n \times n$ matice je latinský čtverec.

3 Buď G bipartitní graf s partitami A a B. Dokažte, že

$$\min_{S \subseteq A} |A| - |S| + |N_G(S)| = \nu(G) = \min_{T \subseteq B} |B| - |T| + |N_G(T)|.$$

4) Pro každé přirozené $k \geq 4$ dokažte, že k-regulární graf $G = (V, E)$ s $\kappa'(G) = k - 1$ má perfektní párování.

   Buď $G = (V, E)$ 3-regulární graf bez mostů.

5a) Dokažte, že pro každou $f \in E$ existuje v G perfektní párování M t.ž. $f \in M$.

5b) Dokažte, že pro každé dvě hrany $f_1 \in E$ a $f_2 \in E$ existuje v G perfektní párovaní M t.ž. $\{f_1, f_2\} \cap M = \emptyset$.