Teorie grafů

ZS 2023/24, FJFI ČVUT

7. domácí úlohy

Deadline: neexistuje, určeno jen jako příprava na zkoušku.

O grafu $G = (V, E)$ řekneme, že je *k-kritický*, jestliže $\chi(G) = k$, nicméně libovolný vlastní podgraf $H \subsetneq G$, tzn. podgraf, který není izomorfní G, splňuje $\chi(H) < \chi(G)$.

1a) Dokažte, že k-kritický graf má minimální stupeň $\delta(G) \geq k - 1$.

1b) Dokažte, že je-li $G = (V, E)$ graf k-kritický a množina vrcholů $S \subseteq V$ je taková, že $G - S$ je nesouvislý, tak potom podgraf $H := \left(S, E \cap \binom{S}{2}\right)$ není úplný.

2a) Dokažte, že je-li 3-regulární graf Hamiltonovský, tak potom je hranově 3-obarvitelný. *(Čistě mezi řečí — co to říká o Hamiltonovskosti Petersenova grafu?)*

2b) Zkonstruujte nekonečně mnoho 3-regulárních 2-souvislých grafů, které jsou hranově 3-obarvitelné a zároveň nejsou Hamiltonovské.

3) Buď $G = (V, E)$ neorientovaný graf. Dokažte, že

$$\chi(G) = \min_{\vec{G} \text{ orientace hran } G} \ell_P(\vec{G}) + 1,$$

kde $\ell_P(\vec{G})$ značí délku nejdelší orientované cesty v $\vec{G}$.

4a) Buď $G = (V, E)$ graf a $\overline{G}$ jeho doplňek. Dokažte, že $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \geq |V|$.

4b) Buď $G = (V, E)$ graf neobsahující trojúhelník a označme $\nu(G)$ velikost největšího párování v G. Dokažte, že $\nu(G) + \chi(\overline{G}) = |V|$.

5) Buď $G = (V, E)$ graf takový, že každé dva liché cykly v G mají společný alespoň jeden vrchol. Dokažte, že $\chi(G) \leq 5$.