Teorie grafů

ZS 2023/24, FJFI ČVUT

8. domací úlohy

Deadline: neexistuje, určeno jen jako příprava na zkoušku.

– –

1) Dokažte, že každý graf $G = (V, E)$ s minimálním stupněm $\delta(G) \geq 1$ má dominující množinu velikosti nejvýše $\left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor$.
(Jen mezi řečí — to dává pro $\delta \leq 5$ lepší výsledek než věta z přednášky!)

2) Buď $k \geq 2$ pevné, a nechť G_k je k-tý graf Mycelského iterativní konstrukce grafů (připomeňme, že $\chi(G_k) = k$). Dokažte, že G_k je k-kritický graf.

3) Dokažte, že každý graf $G = (V, E)$ obsahuje bipartitní faktor $H = (V, F)$ takový, že $|F| \geq \frac{|E|}{2}$ a zároveň velikosti partit H jsou rovny $\left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor$ a $\left\lceil \frac{|V|}{2} \right\rceil$.

4) Buď $G = (V, E)$ graf. Dokažte, že

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{\deg_G(v) + 1}\,.$$

5) Buď $G_{N,p}$ náhodný graf s N vrcholy a pravděpodobností hrany $p = p(N) > 0$ (explicitně zdůrazňujeme, že pravděpodobnost p může záviset na N). Nyní si jako $q(N)$ označme pravděpodobnost jevu, který říká $\alpha\left(G_{N,p}\right) > \left\lceil \frac{2 \ln N}{p} \right\rceil$. Dokažte, že

$$\lim_{N \to \infty} q(N) = 0.$$