Teorie grafů

ZS 2023/24, FJFI ČVUT

9. domácí úlohy

Deadline: neexistuje, určeno jen jako příprava na zkoušku.

– –

1a) Buď $G = (V, E)$ rovinný graf s $|V| \geq 3$. Dokažte, že každé rovinné nakreslení G má nejvýše $2|V| - 4$ stěn.

1b) Pro každé $n \geq 3$ zkonstruujte topologický rovinný graf s n vrcholy a $2n-4$ stěnami.

2) Buď $G = (V, E)$ rovinný graf. Dokažte, že existuje orientace hran E taková, že z každého vrcholu $v \in V$ vychází nejvýše tři šipky.

3a) Buď $G = (V, E)$ rovinný graf neobsahující K_3 jako podgraf. Dokažte, že $\chi(G) \leq 4$.

3b) Buď $G = (V, E)$ graf který lze získat jako sjednocení dvou rovinných grafů. Jinými slovy, existuje rozklad $E = F_1 \cup F_2$ takový, že (V, F_1) i (V, F_2) jsou rovinné grafy. Dokažte, že $\chi(G) \leq 12$.

(Poznamenjme, že tento problém modeluje obarvení politické mapy na Zemi a Marsu, kde každý stát na každé planetě tvoří jen jeden souvislý úsek, a chceme, aby území patřící jednomu státu mělo v obou mapách stejnou barvu.)

4) Zkonstruujte nekonečně mnoho rovinných grafů G s následující vlastnosti: existuje nějaké rovinné nakreslení $\boxed{\text{G}}$ takové, že jeho duální graf $G^\star$ je izomorfní G.

5) Buď H graf s maximálním stupněm $\Delta(H) \leq 3$. Dokažte, že pro každý graf G platí

$$G \text{ obsahje podrozdělení } H \quad \Longleftrightarrow \quad G \text{ obsahuje } H \text{ jako minor.}$$