Teorie grafů

ZS 2023/24, FJFI ČVUT

10. domácí úlohy

Deadline: neexistuje, určeno jen jako příprava na zkoušku.

---

1. Buď $R(k,\ell)$ nejmenší možné přirozené číslo n takové, že každý graf G s n vrcholy splňuje $\omega(G) \geq k$ nebo $\alpha(G) \geq \ell$.

a) Dokažte, že $R(3,4) \leq 9$.

b) Pomocí (a) odvoďte, že $R(4,4) \leq 18$.

Poznamenejme, že existují grafy dokazující $R(3,4) = 9$ *resp.* $R(4,4) = 18$.

2. Pro každé kladné přirozené k a ℓ explicitně zkonstruujte graf s $(k-1)(\ell-1)$ vrcholy, který splňuje $\omega(G) < k$ a $\alpha(G) < \ell$.

3. Buď r kladné přirozené číslo, a nechť $R_r(3)$ označuje nejmenší n takové, že pro každé zobrazení $c : E(K_n) \to [r]$ existují tři různá $i, j, k \in [n]$ taková, že $c(\{i,j\}) = c(\{j,k\}) = c(\{i,k\})$.

a) Dokažte, že $2^r < R_r(3)$.

b) Dokažte, že $3 \cdot r! \geq R_r(3)$.

4. Buď n a r kladná přirozená čísla, a nechť $c : V(K_n) \to [r]$. Dokažte, že vždy naleznete alespoň $\frac{n(n-1)}{r(r+1)}$ hran $\{x,y\} \in E(K_n)$ takových, že $c(x) = c(y)$.

5. Buď $G = (V,E)$ graf, a nechť t_G značí počet trojúhelníků v G, tzn. počet trojic $\{x,y,z\} \in \binom{V}{3}$ takových, že $\{x,y,z\}$ indukuje úplný podgraf v G. Dokažte, že

$$3|V| \cdot t_G \geq |E| \cdot \left(4|E| - |V|^2\right).$$

Hint 1 : Pro každou hranu $\{u,w\} = e \in E$ *uvažte číslo* $t(e)$ *značící počet trojúhelníku obsahující hranu* e*, a dokažte, že platí následující nerovnost:*

$$\deg_G(u) + \deg_G(w) - t(e) \leq |V|.$$

Hint 2 : Dokažte, že platí následující rovnost:

$$\sum_{\{u,w\} \in E} \deg_G(u) + \deg_G(w) = \sum_{v \in V} \left(\deg_G(v)\right)^2.$$