1 Poměrně dost těžká (alespoň dle názoru přednášejícího)

Dokažte, že pro kázdé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 t.ž. následující platí pro všechna $n \geq n_0$:

a) Počet všech nesouvislých grafů na množině vrcholů $[n]$ je $< \varepsilon \cdot 2^{\binom{n}{2}}$.

b) Počet všech grafů na množině vrcholů $[n]$ s více než jedním automorfismus je $< \varepsilon \cdot 2^{\binom{n}{2}}$.

2 O jedné velmi symetrické třídě grafů

Buď q libovolná mocnina prvočísla splňující $q \equiv 1 \pmod 4$. Graf G_q je zkonstruován tak, že jeho vrcholy jsou všechny prvky q-prvkového konečného tělesa $GF(q)$, a dva vrcholy x a y jsou spojeny hranou právě tehdy, když jejich rozdíl je kongruentní a^2 pro nějaké $a \in GF(q) \setminus \{0\}$.

a) Dokažte, že graf G_q je dobře definovaný, neboli $x - y \equiv a^2 \iff y - x \equiv b^2$ pro nějaká $a, b \in GF(q) \setminus \{0\}$.

b) Dokažte, že pro každou dvojici vrcholů $x, y \in V(G_q)$ platí, že existuje $f_{xy} \in \mathrm{Aut}(G_q)$ t.ž. $f(x) = y$.

c) Dokažte, že $\overline{G_q} \cong G_q$.

3 O stromech

Tato úloha má po korekci dne 20.10.2023 pouze jednu část.
Dokažte, že počet neizomorfních stromů s n vrcholy je nejvýše 4^n.

4 O bipartitnosti grafu bez trojúhelníku

Buď $G = (V, E)$ s minimálním stupněm $\delta(G) > \frac{2}{5} \cdot |V|$. Dokažte, že G je buď bipartitní, nebo obsahuje cyklus délky 3. Poté zkonstruujte nekonečně mnoho neizomorfních grafů $G = (V, E)$, které nejsou bipartitní, zároveň neobsahují cyklus délky 3 a zároveň splňují $\delta(G) = \frac{2}{5} \cdot |V|$.

5 O souvislém sudém faktoru

Bud G souvisly graf ktery obsahuje 2 hranove disjuktni kostry. Dokazte, ze G obsahuje sudy faktor ktery je souvisly

6 Vlastní čísla a počty hran z podmnožiny vrcholů

Buď $G = (V, E)$ regulární graf a nechť $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ je jeho spektrum. Dokažte, že pro každou množinu $S \subseteq V$ platí, že počet hran s právě jedním koncem v S splňuje následující nerovnost:

$$|\{e \in E : |e \cap S| = 1\}| \geq \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)|S||V \setminus S|}{|V|}.$$