

Kapitánův deník z Teorie grafů 01TG (ZS 2023)

1 Přednáška 27. září — úvod

Definice 1.1 Graf $G = (V, E)$ je uspořádaná dvojice: nějaká konečná množina vrcholů V , a množina hran E , pro kterou platí $E \subseteq \binom{V}{2}$. Často budeme jako množinu V volit $[n]$.

Obširněji je naše definice grafu v některých zdrojích označována jako *prostý neorientovaný graf*.

Definice 1.2 Pro daný graf G značíme $V(G)$ jeho množinu vrcholů a $E(G)$ jeho množinu hran.

Definice 1.3 Nulový graf je graf (\emptyset, \emptyset) . Nenulový graf je graf, který není nulový.

Definice 1.4 Bud' $G = (V, E)$ graf. Doplnkem grafu G označujeme graf $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$.

Definice 1.5 Pro daný graf $G = (V, E)$ a vrchol $u \in V$, označme $N_G(v)$ tzv. sousedství u v G , kde

$$N_G(v) := \{w \in V : \{u, w\} \in E\}.$$

Prvkům množiny $N_G(u)$ říkáme *sousedé* u ; $\deg_G(u) := |N_G(u)|$ říkáme *stupeň* u .

Věta 1.1 (Princip sudosti neboli “Handshaking lemma”) Pro každý graf $G = (V, E)$ platí, že

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|.$$

Definice 1.6 Isomorfismus dvou grafů $G = (V, E)$ a $H = (W, F)$ je bijekce $f : V \rightarrow W$ t.ž.

$$\{u, w\} \in E \iff \{f(u), f(w)\} \in F \quad \text{pro každé dva různé } u, w \in V.$$

O dvojici grafů, pro které existuje isomorfismus, řekneme, že jsou *isomorfní*, a značíme $G \cong H$.

Definice 1.7 Automorfismus grafu $G = (V, E)$ je bijekce $f : V \rightarrow V$ taková, že jde o isomorfismus G a G , neboli

$$\{u, w\} \in E \iff \{f(u), f(w)\} \in E \quad \text{pro každé dva různé } u, w \in V.$$

Množinu všech automorfismů grafu G značíme $\text{Aut}(G)$.

Pozorování 1.2 Pro každý graf G , množina $\text{Aut}(G)$ s operací skládání tvoří grupu.

Věta 1.3 Bud' \mathcal{G}_n množina všech po dvou neisomorfních grafů s n vrcholy. Platí, že

$$\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} \leq |\mathcal{G}_n| \leq 2^{\binom{n}{2}}$$

Definice 1.8 Bud' $G = (V, E)$ graf, $u \in V$ a $e \in E$. Řekneme, že u je incidentní s e , jestliže $u \in e$. Analogicky, pro $f \in E$ t.ž. $e \neq f$ řekneme, že e je incidentní s f , jestliže $|e \cap f| = 1$.

Definice 1.9 Sled v grafu $G = (V, E)$ z vrcholu $u \in V$ do vrcholu $w \in V$ je posloupnost

$$u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k = w$$

taková, že

- $v_i \in V$ pro každé $i \in [k-1]$,
- $e_i \in E$ pro každé $i \in [k]$, a
- $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ pro každé $i \in [k]$.

Definice 1.10 Tah v grafu G z u do w je sled v G z u do w takový, že každá hrana G je v něm obsažena nejvýše jednou.

Definice 1.11 Cesta v grafu G z u do w je sled v G z u do w takový, že každý vrchol G je v něm obsažen nejvýše jednou. Speciálně, z definice plyne, že každá cesta je také tahem.

Poznámka — nebudeme-li chtít explicitně zdůraznit koncové vrcholy sledu/tahu/cesty, budeme mluvit pouze o sledu v grafu/tahu v grafu/cestě v grafu.

Pozorování 1.4 Bud' $G = (V, E)$ graf a $u \in V, w \in V$ jeho dva vrcholy. Platí, že následující dvě tvrzení jsou navzájem ekvivalentní:

1. Existuje sled v G z vrcholu u do vrcholu w ,
2. Existuje cesta v G z vrcholu u do vrcholu w .

2 Přednáška 4. října — pokračování úvodu

Definice 2.1 Katalog základních grafů:

1. Pro $n \geq 1$, úplný graf na n vrcholech — $K_n := ([n], \binom{[n]}{2})$.
2. Pro $n \geq 1$, prázdný graf na n vrcholech — $E_n := ([n], \emptyset)$.
3. Pro $n \geq 1$, cesta na n vrcholech (též cesta délky $n-1$) — $P_n := ([n], \{\{i, i+1\} : i \in [n-1]\})$.
4. Pro $n \geq 3$, cyklus na n vrcholech (též cyklus délky n) — $C_n := ([n], E(P_n) \cup \{\{n, 1\}\})$.

Definice 2.2 Pro nenulový graf $G = (V, E)$, uvažujme následující relaci \rightsquigarrow na V : pro $u, w \in V$ definujme $u \rightsquigarrow w$ právě když existuje cesta v G z u do w .

Tvrzení 2.1 (DCV) Relace \rightsquigarrow je ekvivalence na V .

Definice 2.3 Pro daný graf G budeme třídám ekvivalence relace \rightsquigarrow říkat komponenty souvislosti. Počet komponent souvislosti budeme značit $\text{comp}(G)$.

Definice 2.4 Nenulový graf G nazveme souvislý, jestliže $\text{comp}(G) = 1$. Pokud nenulový graf není souvislý, neboli $\text{comp}(G) \geq 2$, tak budeme říkat, že je nesouvislý.

Věta 2.2 Pro každé přirozené $n \geq 1$ platí, že

$$n2^{\binom{n}{2}} = \sum_{i \in [n]} \binom{n}{i} \cdot s_i \cdot i \cdot 2^{\binom{n-i}{2}},$$

kde s_i označuje počet souvislých grafů na množině $[n]$.

Definice 2.5 Bud' $G = (V, E)$ graf. Graf $H = (W, F)$ nazveme podgrafem G , a budeme značit $H \subseteq G$, jestliže

1. $W \subseteq V$ a
2. $F \subseteq E \cap \binom{W}{2}$.

Dále, podgraf H nazveme indukovaným podgrafem G , jestliže $F = E \cap \binom{W}{2}$. Konečně, podgraf H nazveme faktorem G , jestliže $W = V$.

Definice 2.6 Cyklem v grafu G rozumíme podgraf $H \subseteq G$ t.ž. $H \cong C_k$ pro nějaké $k \geq 3$.

Definice 2.7 Bud' $G = (V, E)$ graf, $v \in V$ a $e \in E$.

1. Podgraf G indukovaný $V \setminus \{v\}$ budeme zkráceně zapisovat jako $G - v$.
2. Faktor G s množinou hran $E \setminus \{e\}$ budeme zkráceně zapisovat jako $G - e$.

Definice 2.8 Bud' $G = (V, E)$ graf a $e \in E$. Hranu e nazveme mostem v G , jestliže $\text{comp}(G - e) = \text{comp}(G) + 1$.

Lemma 2.3 Bud' $G = (V, E)$ graf a $e \in E$. Platí následující ekvivalence: Hrana e je most v $G \iff e$ není obsažena v žádném cyklu G .

Definice 2.9 Pro daný graf G na množině vrcholů $[n]$ definujeme skóre grafu jako neklesající posloupnost přirozených čísel (d_1, d_2, \dots, d_n) t.ž. $d_i = \deg_G(i)$ pro každé $i \in [n]$.

Věta 2.4 Posloupnost (d_1, d_2, \dots, d_n) je skóre nějakého grafu
 \iff
 $(d_1, d_2, \dots, d_{n-d_n-1}, \underbrace{d_{n-d_n-1}, \dots, d_{n-1}}_{d_n \text{ členů}} - 1)$ je skóre nějakého grafu.

3 Přednáška 4. října — stromy

Věta 3.1 Bud' $G = (V, E)$ nenulový graf. Potom následující definice jsou navzájem ekvivalentní:

1. G souvislý a neobsahuje cyklus,
2. pro každé $x \in V$ a $y \in V$ existuje právě jedna cesta v G z x do y ,
3. G souvislý a každý tah v G je cestou,
4. G je do inkluze vůči hranám maximální graf neobsahující cyklus,
5. G je do inkluze vůči hranám minimální graf, který je souvislý,
6. G je souvislý a $|V| = |E| + 1$.

Definice 3.1 Graf $G = (V, E)$ nazveme stromem, jestliže je souvislý a neobsahuje cyklus.

Definice 3.2 Graf $G = (V, E)$ nazveme lesem, jestliže je neobsahuje cyklus.

Definice 3.3 Je-li $G = (V, E)$ graf a $v \in V$ t.ž. $\deg_G(v) = 1$, potom v nazveme listem G .

Lemma 3.2 Každý strom s alespoň 2 vrcholy obsahuje alespoň 2 listy.

Pozorování 3.3 Bud' $G = (V, E)$ souvislý graf a $v \in V$ list G . Platí, že $G - v$ je souvislý.

Definice 3.4 Bud' $G = (V, E)$ souvislý graf. Faktor $(V, F) = H \subseteq G$ nazveme kostrou G , jestliže H je strom.

Definice 3.5 Bud' τ_n počet všech stromů na množině vrcholů $[n]$. Jinými slovy, τ_n značí počet koster K_n .

Věta 3.4 (Cayleho formule) Pro každé $n \geq 2$ platí, že $\tau_n = n^{n-2}$.

Důsledek 3.5 Počet neisomorfních stromů s n vrcholy je alespoň

$$\frac{1 - o(1)}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^n}{n^{5/2}}.$$

4 Přednáška 11. října — Grafové algoritmy

Definice 4.1 Pro graf $G = (V, E)$ a $e \in \binom{V}{2} \setminus E$ označme $G+e$ graf $(V, E \cup \{e\})$.

Pozorování 4.1 Bud' $G = (V, E)$ souvislý graf, $T = (V, F)$ nějaká jeho kostra a $e \in E \setminus F$. Potom $T+e$ obsahuje právě jeden cyklus C_e^T .

Definice 4.2 Cyklus C_e^T z předcházejícího pozorování nazveme fundamentální cyklus (hrany) e v (grafu) G vůči (kostře) T .

Pozorování 4.2 Bud' $G = (V, E)$ souvislý graf, $T = (V, F)$ nějaká jeho kostra, $e \in E \setminus F$ a $f \in E(C_e^T)$. Potom $(T+e) - f$ je kostra G .

Definice 4.3 Vážený graf $G_w = (V, E, w)$ je uspořádaná trojice, kde (V, E) je graf a $w : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Tvrzení 4.3 Bud' $G = (V, E)$ souvislý graf a $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ prostá funkce. Potom má vážený graf (V, E, w) právě jednu kosteru T_{\min} t.ž.

$$\sum_{e \in E(T_{\min})} w(e) = \min_{\text{kostra } T} \sum_{f \in E(T)} w(f).$$

Kostře T_{\min} říkáme minimální kostra (MST) váženého grafu (V, E, w) .

Věta 4.4 (O Kruskalově algoritmu) *Bud' $G = (V, E)$ souvislý graf a $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ prostá funkce. Seřadíme-li hrany $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ dle vah w vzestupně a budeme-li v tomto pořadí přidávat hrany e_i do T za podmínky zachování acykličnosti, výsledkem je, že T je MST váženého grafu (V, E, w) .*

Definice 4.4 *Pro vážený graf $G_w = (V, E, w)$ a cestu $P = v_0, e_1, v_1, \dots, e_\ell, v_\ell$ v G_w definujeme*

$$w(P) := \sum_{i \in [\ell]} w(e_i).$$

Definice 4.5 *Bud' $G_w = (V, E, w)$ vážený graf a $u, v \in V$ dva jeho (ne nutně různé) vrcholy. Vzdáleností u a v v G_w , kterou budeme značit $\text{dist}_{G_w}(u, v)$, je $\min_{P \in \mathcal{P}_{uv}} w(P)$, kde \mathcal{P}_{uv} značí množinu všech cest v G z u do v .*

Definice 4.6 *O funkci $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ řekneme, že je nezáporná, jestliže $w(e) \geq 0$ pro každé $e \in E$.*

Pozorování 4.5 *Pro každý vážený graf $G_w = (V, E, w)$, kde w je nezáporná, je funkce dist_{G_w} metrikou na V .*

Věta 4.6 (Dijkstra) *Pro každý vážený graf $G_w = (V, E, w)$, kde w je nezáporná, a každý vrchol $s \in V$ existuje acyklický faktor T_s t.ž.*

$$\text{dist}_{G_w}(s, v) = \text{dist}_{T_s}(s, v) \quad \text{pro každý } v \in V.$$

5 Přednáška 12. října — Bipartitní grafy

Definice 5.1 *Graf $G = (V, E)$ nazveme bipartitní, jestliže existuje rozklad V na dvě části L a R t.ž. každá hrana vede “mezi” L a R , neboli $|e \cap L| = |e \cap R| = 1$ pro každou $e \in E$.*

Definice 5.2 *Bud' $G = (V, E)$ graf a $W \subseteq V$. W nazveme nezávislou množinou v G , jestliže podgraf G indukovaný W je prázdný, neboli $E \cap \binom{W}{2} = \emptyset$. Jinak řečeno, $|e \cap W| \leq 1$ pro každou $e \in E$.*

Poznámka — alternativní definice pro bipartitnost: V lze rozdělit na dvě části L a R t.ž. obě jsou nezávislá množina v G .

Pozorování 5.1 *Je-li G bipartitní graf a $H \subseteq G$ jeho podgraf, tak potom H je bipartitní.*

Definice 5.3 *Je-li $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell$ tah v grafu, potom jeho délkou rozumíme počet hran, které obsahuje (tzn. ℓ).*

Definice 5.4 O tahu v grafu $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{\ell-1}, e_{\ell}, v_{\ell}$ řekneme, že je uzavřený, jestliže jeho dva konce jsou stejným vrcholem (tzn. $v_0 = v_{\ell}$).

Věta 5.2 Následující tvrzení jsou pro graf $G = (V, E)$ navzájem ekvivalentní:

1. G je bipartitní.
2. G neobsahuje uzavřený tah liché délky.
3. G neobsahuje indukovaný podgraf isomorfní lichému cyklu.
4. G neobsahuje lichý cyklus (jako podgraf, ne nutně indukovaný).

Věta 5.3 Každý graf $G = (V, E)$ obsahuje bipartitní faktor (V, F) , který splňuje $|F| \geq \lceil \frac{|E|}{2} \rceil$.

Definice 5.5 Bud' $G = (V, E)$ graf. Faktor $H \subseteq G$ určený množinou hran $F \subseteq E$ nazveme sudým faktorem G , jestliže pro každý $v \in V$ platí, že $\deg_H(v)$ je sudé.

Definice 5.6 Bud' $G = (V, E)$ graf s libovolně zafixovaným pořadím hran, neboli $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. Každou $F \subseteq E$ si můžeme skrz její 0/1-ový charakteristický vektor \vec{v}_F představit jako prvek vektorového prostoru \mathbb{Z}_2^m .

Definice 5.7 Pro graf $G = (V, E)$ definujme tzv. prostor cyklů G předpisem

$$\mathcal{C}_G := \{\vec{v}_F : F \text{ sudý faktor } G\}.$$

Tvrzení 5.4 Pro každý graf $G = (V, E)$ je \mathcal{C}_G vektorový podprostor \mathbb{Z}_2^m .

Věta 5.5 Bud' $G = (V, E)$ souvislý graf, T jeho libovolná kostra, a nechť $C_1, C_2, \dots, C_{|E|-|V|+1}$ jsou všechny fundamentální cykly v G vůči T . Charakteristické vektory těchto $|E| - |V| + 1$ cyklů tvoří bázi prostoru \mathcal{C}_G .

6 Přednáška 18. října — Multigrafy, matice grafu

Definice 6.1 Multigraf je uspořádaná dvojice (V, E_M) , kde V je konečná množina vrcholů, a E_M je multimnožina obsahující prvky $\binom{V}{2}$. Jinými slovy, každá dvojice vrcholů může být spojena i více než jednou hranou.

Alternativně, multigraf je vážený graf $G = (V, E, w)$, kde $w : E \rightarrow \mathbb{N}_{>0}$. Pro danou hranu $e \in E$ říkáme hodnotě $w(e)$ násobnost hrany e .

Definice 6.2 Multigraf $G = (V, E, w)$ je souvislý, jestliže graf (V, E) je souvislý.

Definice 6.3 Cyklus délky 2 je multigraf (V, E_M) s $V = [2]$ a $E_M = \{\{1, 2\}, \{1, 2\}\}$.

Definice 6.4 Počet koster multigrafu $G = (V, E_M)$ definujeme jako počet $F \subseteq E_M$ t.ž. (V, F) je strom, a značíme ho $T(G)$. Poznamenáme, že aby (V, F) mohl být stromem, tak nutně násobnost každé hrany v F je rovna jedné (tzn. F je množina).

Definice 6.5 Pro daný multigraf $G = (V, E_M)$ a hranu $\{x, y\} = e \in E$, definujeme multigrafovou kontrakci hrany e bez smyček jako následující multigraf, který budeme značit G/e , na množině vrcholů $(V \setminus \{x, y\}) \cup \{z\}$ s hranami E'_M :

- Každou $\{u, v\} \in E_M$, kde $\{u, v\} \cap \{x, y\} = \emptyset$, vložíme do E'_M ,
- každou $\{u, x\} \in E_M$, kde $u \neq y$, změníme na $\{u, z\}$ a vložíme do E'_M , a
- každou $\{u, y\} \in E_M$, kde $u \neq x$, změníme na $\{u, z\}$ a vložíme do E'_M .

Zdůrazněme, že násobnost každé hrany $\{u, v\}$, kde $\{u, v\} \cap \{x, y\} = \emptyset$, v G/e je stejná jako násobnost $\{u, v\}$ v G , a násobnost každé hrany $\{u, z\}$ v G/e je rovna součtu násobností hran $\{u, x\}$ a $\{u, y\}$ v G .

Tvrzení 6.1 Bud' $G = (V, E_M)$ multigraf a $e \in E_M$ lib. jeho hrana. Platí, že $T(G) = T(G - e) + T(G/e)$.

Definice 6.6 Matice sousednosti multigrafu $G = ([n], E, w)$ je symetrická $n \times n$ matice A_G , kde všechny prvky na diagonále jsou rovny nule, a $(A_G)_{i,j}$ pro $i \neq j$ je rovno
$$\begin{cases} w(\{i, j\}) & \text{pokud } \{i, j\} \in E, a \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tvrzení 6.2 Bud' $G = ([n], E, w)$ multigraf s maticí sousednosti A_G . Pro každě $k \in \mathbb{N}_{>0}$ platí, že prvek matice $(A_G)^k$ na pozici i, j je roven počtu sledů délky k z vrcholu i do vrcholu j .

Definice 6.7 Spektrum multigrafu G s n vrcholy jsou vlastní čísla jeho matice sousednosti A_G . Typicky je značíme $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ a předpokládáme, že platí $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

Tvrzení 6.3 Bud' $G = (V, E)$ graf s minimálním stupněm vrcholů δ a maximálním stupněm vrcholů Δ , a nechť λ_1 je největší vlastní číslo matice sousednosti A_G . Potom platí, že $\Delta \geq \lambda_1 \geq \delta$. Ve skutečnosti platí, že $\lambda_1 \geq 2|E|/|V| = \mathbb{E}_{v \in V} \deg_G(v)$.

Definice 6.8 Matice incidence multigrafu $G = ([n], E, w)$ s celkem m hranami e_1, e_2, \dots, e_m je boolovská symetrická $n \times m$ matice B_G , kde v i -tém sloupci jsou přesně dvě jedničky, a to na pozicích odpovídajících koncům hrany e_i .

Pozorování 6.4 Bud' $G = ([n], E_M)$ multigraf s maticí sousednosti A_G a maticí incidence B_G . Potom platí, že

Definice 6.9 Laplaceova matice multigrafu $G = ([n], E, w)$ je symetrická $n \times n$ matice L_G , kde

- $(L_G)_{i,i}$, pro $i \in [n]$, je rovno $\deg_G(i)$, a
- $(L_G)_{i,j}$, pro $\{i, j\} \in \binom{[n]}{2}$, je rovno $\begin{cases} -w(\{i, j\}) & \text{pokud } \{i, j\} \in E, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$

Pozorování 6.5 Bud' $G = ([n], E_M)$ multigraf s maticí sousednosti A_G , maticí incidence B_G a Laplaceovou maticí L_G . Potom platí, že

$$B_G \cdot B_G^T = \begin{pmatrix} \deg_G(1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \deg_G(2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \deg_G(n) \end{pmatrix} + A_G,$$

a

$$L_G = \begin{pmatrix} \deg_G(1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \deg_G(2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \deg_G(n) \end{pmatrix} - A_G = B_G \cdot B_G^T - 2A_G.$$

Pozorování 6.6 Bud' $G = ([n], E_M)$ multigraf s Laplaceovou maticí L_G . Matice L_G je singulární a pozitivně semidefiniční. Ve skutečnosti, pro každý vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ platí, že

$$x^T L_G x = \sum_{\{i,j\} \in E_M} ((\vec{x})_i - (\vec{x})_j)^2.$$

7 Přednáška 19. října — Počet koster, jednotážky

Tvrzení 7.1 *Bud' $G = ([b], E_M)$ multigraf a L_G jeho Laplaceova matice. Platí, že hodnota L_G je rovna $n - 1 \iff G$ je souvislý.*

Definice 7.1 *Pro čtvercovou matici M s rozměry $n \times n$ a číslo $i \in [n]$ budeme značit $M^{(i)}$ matici získanou z M smazáním i -tého řádku a i -tého sloupce.*

Věta 7.2 *Bud' $G = ([n], E_M)$ multigraf s Laplaceovou maticí L_G . Pro každé $i \in [n]$ platí, že $\det L_G^{(i)} = T(G)$, tzn. počtu koster G .*

Definice 7.2 *Bud' $G = (V, E_M)$ multigraf. Tah v G nazvěme Eulerovský, jestliže je uzavřený a zároveň má délku $|E_M|$ (jinými slovy, obsahuje všechny hrany G).*

Věta 7.3 *Bud' $G = (V, E_M)$ multigraf. G obsahuje Eulerovský tah $\iff G$ je souvislý a $\deg_G(v)$ je sudé číslo pro každý vrchol $v \in V$.*

Důsledek 7.4 *Bud' $G = (V, E_M)$ multigraf. G obsahuje tah délky $|E_M| \iff G$ je souvislý a počet vrcholů G lichého stupně je buď 0 nebo 2.*

8 Přednáška 1. listopadu — Hamiltonovské cykly, neseparovatelné grafy

Definice 8.1 *O grafu $G = (V, E)$ řekneme, že je Hamiltonovský, jestliže obsahuje cyklus s $|V|$ vrcholy jako podgraf. Cyklus obsahující všechny vrcholy G nazýváme Hamiltonovské.*

Věta 8.1 (Oreho věta) *Bud' $G = (V, E)$ graf s $|V| \geq 3$ t.ž. každé dva vrcholy $u, w \in V$ nespojené hranou v G splňují $\deg_G(u) + \deg_G(w) \geq |V|$. Potom G je Hamiltonovský.*

Důsledek 8.2 (Diracova věta) *Bud' $G = (V, E)$ graf s $|V| \geq 3$ t.ž. každý vrchol má stupeň alespoň $|V|/2$. Potom G je Hamiltonovský.*

Tvrzení 8.3 *Bud' $G = (V, E)$ graf s $|V| \geq 3$ a nechť existuje neprázdná $X \subseteq V$ splňující, že indukovaný podgraf G množinou $V \setminus X$ má ostře víc než $|X|$ komponent souvislosti. Potom G není Hamiltonovský.*

Definice 8.2 *Bud' $G = (V, E)$ graf. Vrchol $v \in V$ nazvěme artikulací, jestliže indukovaný podgraf množinou $V \setminus \{v\}$ má více komponent souvislosti než G .*

Definice 8.3 *Souvislý graf $G = (V, E)$ s $|V| \geq 3$ nazvěme neseparovatelný, jestliže žádný vrchol G není artikulace.*

Lemma 8.4 *Obsahuje-li souvislý graf $G = (V, E)$ s $|V| \geq 3$ most, potom obsahuje artikulaci.*

Věta 8.5 *Graf $G = (V, E)$ je neseparovatelný \iff pro každé dva vrcholy $u, w \in V$ existují dvě cesty P_1 a P_2 obě vedoucí z u do w t.ž. $V(P_1) \cap V(P_2) = \{u, w\}$. Jinak řečeno, každé dva vrcholy v G leží na nějaké společné kružnici.*

9 Přednáška 2. listopadu — ušaté lemma, k -souvislost

Definice 9.1 *Bud' $G = (V, E)$ graf a necht' $\{u, w\} = e \in E$. Podrozdělením hrany e v G rozumíme graf, který budeme značit $G : e$, získaný z grafu $G - e$ přidáním nového vrcholu v_e , který je následně spojen s vrcholy u a w .*

Lemma 9.1 *Graf $G = (V, E)$ je neseparovatelný \iff pro každou $e \in E$ je $G : e$ neseparovatelný.*

Důsledek 9.2 *Bud' $G = (V, E)$ neseparovatelný graf a necht' $e, f \in E$. Potom existuje cyklus v G obsahující e a f .*

Definice 9.2 *Necht' $G = (V, E)$ je graf. Na prvcích množiny E definujeme relaci \sim_B t.ž. $e \sim_B f$ právě tehdy, když bud' $e = f$, nebo existuje cyklus v G obsahující e a f .*

Tvrzení 9.3 *Pro každý graf $G = (V, E)$ je relace \sim_B ekvivalencí na E .*

Definice 9.3 *Bud' $G = (V, E)$ graf. Třídám ekvivalence \sim_B říkáme bloky G .*

Definice 9.4 *Bud' $G = (V, E)$ graf a $u, w \in V$ jeho dva různé vrcholy. Přilepením ucha délky ℓ do G mezi u a w rozumíme graf získaný přidáním $\ell - 1$ nových vrcholů $v_1, \dots, v_{\ell-1}$ do G a následně přidáním cesty $u, v_1, v_2, \dots, v_{\ell-1}, w$.*

Věta 9.4 (Ušaté lemma) *Každý neseparovatelný graf $G = (V, E)$ lze získat tak, že k cyklu vhodné délky se postupně přilepuje posloupnost uší. Jinými slovy, existuje posloupnost $G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_t$ taková, že $G_0 \cong C_\ell$ pro nějaké $\ell \in \mathbb{N}_0$, $G_t \cong G$, a pro každé $i \in [t]$ se graf G_{i+1} se získá z grafu G_i přilepením ucha.*

Definice 9.5 *Bud' $G = (V, E)$ graf a $u, w \in V$ jeho dva různé vrcholy. Označme $p_G(u, w)$ jako maximální počet až na konce vrcholově disjunktálních cest v G mezi u a w .*

Definice 9.6 Graf $G = (V, E)$ s $|V| \geq 2$ nazveme (vrcholově-)k-souvislý, pokud platí, že $p_G(u, w) \geq k$ pro každé $u, w \in V$. Vrcholovou souvislostí $\kappa(G)$ budeme rozumět největší k t.ž. G je vrcholově-k-souvislý.

Věta 9.5 (Menger, globální vrcholová verze) Graf $G = (V, E)$ je k-souvislý $\iff |V| \geq k + 1$ a pro každé $W \subseteq V$ splňující $|W| \leq k - 1$ platí, že $G - W$ je souvislý.

Definice 9.7 Bud' $G = (V, E)$ graf a $u, w \in V$ jeho dva různé vrcholy splňující $\{u, w\} \notin E$. Separátorem mezi u a w v G rozumíme nějakou množinu vrcholů $W \subseteq V \setminus \{u, w\}$ t.ž. $G - W$ má vrcholy u a w v různých komponentách souvislosti.

Definice 9.8 Bud' $G = (V, E)$ graf a $u, w \in V$ jeho dva různé vrcholy splňující $\{u, w\} \notin E$. Označme $c_G(u, w)$ jako minimální velikost separátoru mezi u a w v G .

Věta 9.6 (Menger, lokální vrcholová verze) Bud' $G = (V, E)$ graf a $u, w \in V$ jeho dva různé vrcholy splňující $\{u, w\} \notin E$. Potom platí, že $p_G(u, w) = c_G(u, w)$.

Definice 9.9 Bud' $G = (V, E_M)$ multigraf a $u, w \in V$ jeho dva různé vrcholy. Označme $p'_G(u, w)$ jako maximální počet hranově disjunktích cest v G mezi u a w .

Definice 9.10 Multigraf $G = (V, E_M)$ s $|V| \geq 2$ nazveme hranově-k-souvislý, pokud platí, že $p'_G(u, w) \geq k$ pro každé $u, w \in V$. Hranovou souvislostí $\kappa'(G)$ budeme rozumět největší k t.ž. G je hranově-k-souvislý.

Věta 9.7 (Menger, globální hranová verze) Multigraf $G = (V, E_M)$ je hranově-k-souvislý \iff pro každou multimnožinu $F_M \subseteq E_M$ splňující $|F_M| \leq k - 1$ platí, že $G - F_M$ je souvislý.

Definice 9.11 Bud' $G = (V, E_M)$ multigraf a $u, w \in V$ jeho dva různé vrcholy. Řezem mezi u a w v G rozumíme nějakou multimnožinu hran $F_M \subseteq E_M$ t.ž. $G - F_M$ má vrcholy u a w v různých komponentách souvislosti.

Definice 9.12 Bud' $G = (V, E_M)$ multigraf a $u, w \in V$ jeho dva různé vrcholy. Označme $c'_G(u, w)$ jako minimální velikost řezu mezi u a w v G .

Věta 9.8 (Menger, lokální hranová verze) Bud' $G = (V, E_M)$ multigraf a $u, w \in V$ jeho dva různé vrcholy. Potom platí, že $p'_G(u, w) = c'_G(u, w)$.

10 Přednáška 8. listopadu — Mengerovy věty

Lemma 10.1 *Bud' $G = (V, E)$ graf který není úplný. Potom platí, že*

$$\kappa(G) = \min_{\substack{u, w \in V: u \neq w, \\ \{u, w\} \notin E}} p_G(u, w) = \min_{\substack{u, w \in V: u \neq w, \\ \{u, w\} \notin E}} c_G(u, w).$$

Lemma 10.2 *Nechť $G = (V, E)$ je k -souvislý graf a necht' $X \subseteq V$ t.ž. $|X| \geq k$. Označme grafem G^+ graf získaný z G přidáním nového vrcholu x , jehož sousedství $N_{G^+}(x) = X$. Platí, že G^+ je k -souvislý.*

Důsledek 10.3 *Nechť $G = (V, E)$ je k -souvislý graf a necht' $X \subseteq V$ a $Y \subseteq V$ t.ž. $|X| = |Y| = k$. Potom existuje k vrcholově disjunktních cest P_1, \dots, P_k t.ž. každá cesta P_i , kde $i \in [k]$, má přesně jeden konec v X a druhý donec v Y .*

11 Přednáška 9. listopadu — Toky v sítích

Definice 11.1 *Bud' $G = (V, E_M)$ multigraf a $X \subseteq V$. Hranici X v G definujeme jako množinu hran G s přesně jedním koncem v X , a značíme ji*

$$\partial_G(X) := \{e \in E_M : |e \cap X| = 1\}.$$

Pro $v \in V$ budeme zkráceně psát $\partial_G(v)$ namísto $\partial_G(\{v\})$.

Pozorování 11.1 *Bud' $G = (V, E_M)$ multigraf a $u, w \in V$ jeho dva různé vrcholy. Potom platí, že*

$$\min_{\substack{X \subseteq V: \\ u \in X \& w \notin X}} |\partial_G(X)|.$$

Definice 11.2 *Digraf $G = (V, A)$ je uspořádaná dvojice: nějaká konečná množina vrcholů V , a množina šipek A , pro kterou platí $A \subseteq (V \times V) \setminus \{(v, v) : v \in V\}$.*

Definice 11.3 *Orientovaný $G = (V, E, o)$ je uspořádaná trojice, kde (V, E) je graf a $o : E \rightarrow V$ splňující $o(e) \in e$ pro každé $e \in E$. Orientaci grafu interpretujeme tak, že každá hrana e získala svůj start, který odpovídá vrcholu $o(e)$, a cíl, který odpovídá opačnému konci e než je $o(e)$. Alternativně lze definovat orientovaný graf jakožto digraf, kde pro každé dva vrcholy $u, w \in V$ platí, že obsahuje nejvýše jednu z šipek (u, w) a (w, u) .*

Definice 11.4 *Bud' $G = (V, A)$ digraf a necht' $u, w \in V$. Orientovaná cesta délky k v G z u do w je posloupnost $u = v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k = w$, kde $\{v_0, \dots, v_k\} \subseteq V$, $\{e_1, \dots, e_k\} \subseteq A$, a $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ pro každé $i \in [k]$.*

Definice 11.5 Bud' $G = (V, A)$ digraf. Orientovaný cyklus v G je orientovaná cesta z nějakého vrcholu u do nějakého vrcholu w v G společně s šípkou (w, u) . Digraf nazveme acyklický, jestliže neobsahuje žádnou orientovanou kružnici.

Definice 11.6 Bud' $G = (V, A)$ digraf a $X \subseteq V$. Ven-orientovanou hranicí X v G definujeme jako množinu šipek G vycházejících z nějakého vrcholu z X a vedoucích do nějakého vrcholu z $V \setminus X$, kterou budeme značit

$$\partial_G^+(X) := \{(x, y) \in A : x \in X \text{ \& } y \in V \setminus X\}.$$

Analogicky definujeme dovnitř-orientovanou hranici X v G jako

$$\partial_G^-(X) := \{(y, x) \in A : x \in X \text{ \& } y \in V \setminus X\}.$$

Opět budeme pro $v \in V$ zkracovat $\partial_G^+(\{v\})$ a $\partial_G^-(\{v\})$ na $\partial_G^+(v)$ a $\partial_G^-(v)$.

Lemma 11.2 Bud' $G = (V, A)$ digraf a s a t jeho dva různé vrcholy. Potom nastává právě jedna možnost:

1. G obsahuje orientovanou cestu z s do t , nebo
2. existuje $X : \{s\} \subseteq X \subseteq V \setminus \{t\}$ t.ž. $\partial_G^+(X) = \emptyset$.

Definice 11.7 Bud' $G = (V, A)$ digraf a s a t jeho dva různé vrcholy. (Celočíselný) Tok v G z s do t je zobrazení $\varphi : E \rightarrow \mathbb{N}_0$ t.ž. pro každé $w \in V \setminus \{s, t\}$ platí

$$\sum_{e^+ \in \partial_G^+(w)} \varphi(e^+) = \sum_{e^- \in \partial_G^-(w)} \varphi(e^-).$$

Hodnotou φ rozumíme $\sum_{e^+ \in \partial_G^+(s)} \varphi(e^+) - \sum_{e^- \in \partial_G^-(s)} \varphi(e^-)$, a budeme ji značit $\text{val}(\varphi)$.

Lemma 11.3 Bud' $G = (V, A)$ digraf, s a t jeho dva různé vrcholy, φ tok z s do t a $X : \{s\} \subseteq X \subseteq V \setminus \{t\}$. Platí, že

$$\text{val}(\varphi) = \sum_{e^+ \in \partial_G^+(X)} \varphi(e^+) - \sum_{e^- \in \partial_G^-(X)} \varphi(e^-).$$

Definice 11.8 Bud' $G = (V, A)$ digraf, s a t jeho dva různé vrcholy a φ tok z s do t . Nosičem φ rozumíme množinu šipek $\text{supp } \varphi = \{e \in A : \varphi(e) > 0\}$.

Lemma 11.4 Bud' $G = (V, A)$ digraf, s a t jeho dva různé vrcholy a φ tok z s do t . Potom existuje tok ψ z s do t t.ž. $\text{val}(\varphi) = \text{val}(\psi)$ a digraf $(V, \text{supp } \psi)$ je acyklický.

Tvrzení 11.5 *Bud' $G = (V, A)$ digraf, s a t jeho dva různé vrcholy a φ tok z s do t splňující $\text{val}(\varphi) = k$. Potom existují P_1, P_2, \dots, P_k orientované cesty v G z s do t t.ž. každá $e \in A$ je obsažena v nejvýše $\varphi(e)$ těchto cestách.*

Definice 11.9 *Bud' $G = (V, A)$ digraf, s a t jeho dva různé vrcholy, a nechť $c : E \rightarrow \mathbb{N}_0$ je zobrazení, kterému budeme říkat kapacita šipek. Tok φ z s do t nazveme c -přípustný, jestliže $\varphi(e) \leq c(e)$ pro všechny $e \in A$.*

Definice 11.10 *Síť je uspořádaná pětice (V, A, s, t, c) t.ž. (V, A) je digraf, s a t jeho dva různé vrcholy, a $c : E \rightarrow \mathbb{N}_0$ je kapacita šipek. Tokem v síti rozumíme c -přípustný tok v (V, A) z s do t .*

Definice 11.11 *Bud' φ tok v síti (V, A, s, t, c) , a nechť $x \in V$. Řekneme, že **neorientovaná** ("orientace-ignorující", tzn. může chodit po šípkách i v opačném směru) cesta $P = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_\ell, v_\ell$, kde $v_0 = s$ a $v_\ell = x$ je φ -zlepšující cesta z s do t , jestliže platí pro každé $i \in [\ell]$:*

- když $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, tak $\varphi(e_i) \leq c(e_i) - 1$, a
- když $e_i = (v_i, v_{i-1})$, tak $\varphi(e_i) \geq 1$.

Lemma 11.6 *Bud' φ tok v síti (V, A, s, t, c) , a nechť P je nějaká φ -zlepšující cesta z s do t . Potom existuje c -přípustný tok ψ z s do t t.ž. $\text{val}(\psi) = \text{val}(\varphi) + 1$.*

Definice 11.12 *Bud' (V, A, s, t, c) síť. Kapacitu množiny X splňující $\{s\} \subseteq X \subseteq V \setminus \{t\}$ definujeme jako*

$$\text{cap}(X) := \sum_{e^+ \in \partial_G^+(X)} \varphi(e^+).$$

Věta 11.7 (Ford-Fulkerson) *Bud' (V, A, s, t, c) síť a Φ množina všech c -přípustných toků v (V, A) z s do t . Potom platí, že*

$$\max_{\varphi \in \Phi} \text{val}(\varphi) = \min_{X: \{s\} \subseteq X \subseteq V \setminus \{t\}} \text{cap}(X).$$

12 Přednáška 15. listopadu — Párování #1

Definice 12.1 *Bud' $G = (V, E)$ graf. Řekneme, že $M \subseteq E$ je párování v G , jestliže pro každé dvě různé hrany $e, f \in M$ platí, že $e \cap f = \emptyset$. Největší možnou velikost párování v G označme $\nu(G)$.*

Definice 12.2 *Bud' $G = (V, E)$ graf. Řekneme, že $X \subseteq V$ je vrcholové pokrytí v G , jestliže pro každou hranu $e \in E$ platí, že $|e \cap X| \geq 1$. Nejmenší možnou velikost vrcholového pokrytí v G označme $\tau(G)$.*

Pozorování 12.1 Pro každý graf $G = (V, E)$ platí, že

$$\nu(G) \leq \tau(G) \leq 2\nu(G).$$

Definice 12.3 Bud' $G = (V, E)$ graf a M párování v G . Řekneme, že cesta $P = v_0, e_1, v_1, \dots, e_\ell, v_\ell$ v G je M -střídavá, jestliže

- bud' $e_i \in M \iff i$ je liché,
- nebo $e_i \in M \iff i$ je sudé.

Definice 12.4 Bud' $G = (V, E)$ graf a M párování v G . Řekneme, že M -střídavá cesta $P = v_0, e_1, v_1, \dots, e_\ell, v_\ell$ v grafu G je M -zlepšující, jestliže

$$\{v_0, v_\ell\} \cap \bigcup_{f \in M} f = \emptyset.$$

Lemma 12.2 (Berge) Je-li $G = (V, E)$ graf a M párování v G , potom $|M| = \nu(G) \iff \nexists M$ -zlepšující cesta v G .

Věta 12.3 (König) Je-li $G = (V, E)$ bipartitní graf, potom $\tau(G) = \nu(G)$.

Definice 12.5 Bud' $G = (V, E)$ graf a $X \subseteq V$. Sousedstvím X nazvěme množinu

$$N_G(S) := \bigcup_{x \in X} N_G(x).$$

Věta 12.4 (Hall) Bud' $G = (V, E)$ bipartitní graf s partitami A a B . Platí, že $\nu(G) = |A| \iff |N_G(S)| \geq |S|$ pro každou $S \subseteq A$.

Definice 12.6 Bud' $G = (V, E)$ graf. Párování M v G nazveme perfektní, jestliže $|M| = |V|/2$.

Důsledek 12.5 Bud' $k \geq 1$. Je-li $G = (V, E)$ k -regulární bipartitní graf, potom G obsahuje perfektní párování. Co víc, G obsahuje k perfektních párování M_1, M_2, \dots, M_k t.ž. $E = \bigcup_{i \in [k]} M_i$.

13 Přednáška 16. listopadu — Párování #2

Definice 13.1 Bud' $G = (V, E)$ graf. Největší možnou velikost nezávislé množiny v G označme $\alpha(G)$.

Pozorování 13.1 Bud' $G = (V, E)$ graf. Potom platí, že

$$\alpha(G) + \tau(G) = |V|.$$

Definice 13.2 Bud' $G = (V, E)$ graf s minimálním stupněm $\delta \geq 1$. Řekneme, že $F \subseteq E$ je hranové pokrytí v G , jestliže $V = \bigcup_{f \in F} f$. Nejmenší možnou velikost hranového pokrytí v G označme $\rho(G)$.

Tvrzení 13.2 (Gallai) Bud' $G = (V, E)$ graf s minimálním stupněm $\delta \geq 1$. Potom platí, že

$$\nu(G) + \rho(G) = |V|.$$

Lemma 13.3 Bud' $H = (V, E)$ souvislý graf t.ž. pro každý $v \in V$ platí, že $\nu(G - v) = \nu(G)$. Potom $\nu(G) = \frac{|V|-1}{2}$. Speciálně, $|V|$ je liché.

Definice 13.3 Bud' $H = (V, E)$ graf. Počet komponent souvislosti H , které mají lichý počet vrcholů, budeme značit $\text{odd}(H)$.

Definice 13.4 Bud' $G = (V, E)$ graf a M párování v G . Počet nespárovaných vrcholů v M budeme značit

$$\text{unm}_G(M) := |V| - 2|M|.$$

Věta 13.4 (Tutte-Berge) Bud' $H = (V, E)$ graf. Platí, že

$$\max_{B \subseteq V} \text{odd}(G - B) - |B| = \min_{M \subseteq E \text{ párování}} \text{unm}_G(M).$$

Důsledek 13.5 (Tutte) Bud' $G = (V, E)$ graf. Platí, že G má perfektní párování $\iff |B| \geq \text{odd}(G - B)$ pro každou $B \subseteq V$.

Důsledek 13.6 Bud' $G = (V, E)$ graf. Potom

$$\nu(G) = \min_{B \subseteq V} \frac{|V| - \text{odd}(G - B) + |B|}{2}.$$

Důsledek 13.7 (Petersen) Je-li $G = (V, E)$ 3-regulární graf bez mostů, potom G obsahuje perfektní párování.

14 Přednáška 22. listopadu — hranová barevnost

Definice 14.1 *Bud' $G = (V, E_M)$ multigraf. Zobrazení $c : E_M \rightarrow [k]$ nazveme hranovým k -obarvením, jestliže $c^{-1}(i)$ je párování pro každé $i \in [k]$. Jinými slovy, pro každé dvě různé hrany $e \in E_M$ a $f \in E_M$ splňující $|e \cap f| \geq 1$ platí, že $c(e) \neq c(f)$. Hranovou barevností grafu $\chi'(G)$ označíme nejmenší možné k t.ž. existuje hranové k -obarvení G .*

Pozorování 14.1 *Bud' $G = (V, E_M)$ multigraf s maximálním stupněm Δ . Potom platí, že $\chi'(G) \geq \Delta$.*

Věta 14.2 (König) *Bud' $G = (V, E_M)$ bipartitní multigraf s maximálním stupněm Δ . Potom platí, že $\chi'(G) \leq \Delta$.*

Věta 14.3 (Vizing) *Bud' $G = (V, E_M)$ graf s maximálním stupněm Δ . Potom platí, že $\chi'(G) \leq \Delta + 1$.*

Věta 14.4 (Vizing, silnější verze) *Bud' $G = (V, E_M)$ multigraf s maximálním stupněm Δ , a necht' μ maximální násobnost hrany v G . Potom platí, že $\chi'(G) \leq \Delta + \mu$.*

Věta 14.5 (Shannon) *Bud' $G = (V, E_M)$ multigraf s maximálním stupněm Δ . Potom platí, že $\chi'(G) \leq \lfloor \frac{3\Delta}{2} \rfloor$.*

Věta 14.6 (Shannon, slabší verze) *Bud' $G = (V, E_M)$ multigraf s maximálním stupněm Δ . Potom platí, že $\chi'(G) \leq 3 \lfloor \frac{\Delta}{2} \rfloor$.*

15 Přednáška 22. listopadu — vrcholová barevnost

Definice 15.1 *Bud' $G = (V, E)$ graf. Zobrazení $c : V \rightarrow [k]$ nazveme (vrcholovým) k -obarvením, jestliže pro každou hranu $\{u, w\} \in E$ platí, že $c(u) \neq c(w)$. Vrcholovou barevností grafu $\chi(G)$ označíme nejmenší možné k t.ž. existuje vrcholové k -obarvení G .*

Pozorování 15.1 *Bud' $G = (V, E)$ graf s maximálním stupněm Δ . Potom platí, že $\chi(G) \leq \Delta + 1$.*

Definice 15.2 *Pro multigraf $G = (V, E_M)$ definujeme jeho hranograf (anglicky line-graph) $L(G)$ jako následující graf:*

- vrcholy $L(G)$ jsou prvky E_M (tzn. hrany G včetně jejich násobností), a
- $e, f \in E_M$ jsou spojeny hranou v $L(G)$ právě tehdy, když $|e \cap f| \geq 1$.

Pozorování 15.2 *Pro každý multigraf G platí, že $\chi'(G) = \chi(L(G))$.*

Definice 15.3 *Graf $G = (V, E)$ nazveme d -degenerovaný, jestliže existuje v V t.ž. $\deg_G(v) \leq d$ a $G - v$ je d -degenerovaný.*

Tvrzení 15.3 *Bud' $G = (V, E)$ d -degenerovaný graf. Potom platí, že $\chi(G) \leq d + 1$.*

Pozorování 15.4 *Pro každý graf $G = (V, E)$ platí, že $\chi(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{\alpha(G)} \right\rceil$.*

Definice 15.4 *Bud' $G = (V, E)$ graf a $W \subseteq V$. W nazveme klikou v G , jestliže podgraf G indukovaný W je úplný, neboli $E \cap \binom{W}{2} = \binom{W}{2}$. Jinak řečeno, klikka v G odpovídá nezávislé množině v \overline{G} . Největší možnou velikost kliky v G označme $\omega(G)$.*

Pozorování 15.5 *Pro každý graf $G = (V, E)$ platí, že $\chi(G) \geq \omega(G)$.*

Tvrzení 15.6 *Pro každý graf $G = (V, E)$ platí, že $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq |V| + 1$.*

Věta 15.7 (Brooks) *Bud' $G = (V, E)$ souvislý graf s maximálním stupněm $\Delta \geq 3$, který není úplný. Potom platí, že $\chi(G) \leq \Delta$.*

Důsledek 15.8 *Bud' $G = (V, E)$ souvislý graf s maximálním stupněm Δ t.ž. $\chi(G) = \Delta + 1$. Potom G musí být úplný graf nebo cyklus liché délky.*

16 Přednáška 29. listopadu — pravděpodobnostní metoda

Definice 16.1 Graf $G = (V, E)$ nazveme k -kritickým, jestliže $\chi(G) = k$ a zároveň $\chi(H) < k$ pro každý $H \subsetneq G$.

Definice 16.2 Bud' $G_2 := K_2$ a rekurzivně pro každé $k \geq 3$ definujme graf G_k s $2n + 1$ vrcholy $u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_n, z$, kde $n = |V(G_{k-1})|$, následujícím způsobem:

1. sousedství vrcholu z , tj. $N_G(z)$, je rovno $\{w_1, \dots, w_n\}$.
2. vrcholy u_1, \dots, u_n indukují podgraf isomorfní G_{k-1} ,
3. vrcholy w_1, \dots, w_n tvoří nezávislou množinu v G_k , a
4. dvojice vrcholů u_i a w_j je spojena hranou $\iff u_i$ a w_j je spojeno hranou.

Věta 16.1 (Mycelski) Pro každé $k \geq 2$ platí, že graf G_k z předchozí definice má $\chi(G_k) = k$ a zároveň neobsahuje trojúhelník.

Definice 16.3 Bud' $G = (V, E)$ graf. Řekneme, že $W \subseteq V$ je dominující množina v G , jestliže pro každý vrchol $x \in V \setminus W$ platí, že $|N_G(x) \cap W| \geq 1$. Nejmenší možnou velikost dominující množiny v G označme $\gamma(G)$.

Věta 16.2 Každý graf $G = (V, E)$ s minimálním stupněm δ obsahuje dominující množinu velikosti $|V| \cdot \frac{1 + \log(\delta + 1)}{\delta + 1}$.

Věta 16.3 (Erdős) Pro každé $k \geq 3$ a každé $\ell \geq 3$ existuje graf $G_{k,\ell}$ t.ž. $\chi(G_{k,\ell}) \geq k$ a zároveň neobsahuje žádný cyklus délky nejvýše ℓ .

17 Přednáška 30. listopadu — rovinné grafy

Definice 17.1 Bud' $G = (V, E)$ graf. Nakreslením G v \mathbb{R}^2 rozumíme $(g, (f_e)_E)$, kde $g : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ je prosté zobrazení a $f_e : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ je prosté spojitě zobrazení pro každé $e \in E$, splňující následující vlastnosti:

- pro každou hranu $\{u, w\} = e \in E$ platí, že $f_e(0) = g(u)$ a $f_e(1) = g(w)$, a
- pro každou hranu $\{u, w\} = e \in E$ platí, že $\{f_e(t) : t \in (0, 1)\} \cap g(V) = \emptyset$.

Dále o nakreslení G v \mathbb{R}^2 řekneme, že je rovinné, jestliže pro každé dvě různé hrany $e_1 \in E$ a $e_2 \in E$ platí, že

$$\{f_{e_1}(t) : t \in (0, 1)\} \cap \{f_{e_2}(t) : t \in (0, 1)\} = \emptyset.$$

Definice 17.2 Bud' $G = (V, E)$ graf. Řekneme, že G je rovinný graf, jestliže existuje rovinné nakreslení G . Uspořádanou trojici $(G, g, (f_e)_E)$, kde $(g, (f_e)_E)$ je rovinné nakreslení G , budeme nazývat topologický rovinný graf. Topologický rovinný graf budeme značit \boxed{G} .

Definice 17.3 Bud' $\boxed{G} := (G, g, (f_e)_E)$ topologický rovinný graf, a necht'

$$X := g(V) \cup \left(\bigcup_{e \in E} \{f_e(t) : t \in [0, 1]\} \right).$$

Souvislé oblasti $\mathbb{R}^2 \setminus X$ (v topologickém slova smyslu) budeme nazývat stěny \boxed{G} .

Pozorování 17.1 Každý topologický rovinný graf \boxed{G} má právě jednu stěnu, jejíž plocha je neomezená.

Definice 17.4 Pro daný topologický rovinný graf \boxed{G} budeme jeho neomezenou stěnu nazývat vnější stěna, a budeme ji značit $\text{ext } \boxed{G}$.

Tvrzení 17.2 Bud' $\boxed{G} = (G, g, (f_e))$ topologický rovinný graf, F nějaká jeho stěna, a necht' ∂F značí množinu hran G , jež leží na hranici F . Potom existuje topologický rovinný graf $(G, g', (f'_e))$ který má hranici své vnější stěny rovnu ∂F .

Definice 17.5 Spojité zobrazení $k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ takové, že $k(0) = k(1)$ a k je na $[0, 1)$ prosté, budeme nazývat topologická kružnice v \mathbb{R}^2 .

Věta 17.3 (Jordan) Každá topologická kružnice v \mathbb{R}^2 rozděluje \mathbb{R}^2 na právě dvě souvislé oblasti.

Věta 17.4 (Eulerova formule) Bud' $G = (V, E)$ rovinný graf, a necht' \boxed{G} je nějaké jeho nakreslení. Potom

$$|V| - |E| + \#\text{stěn } \boxed{G} = 1 + \text{comp}(G).$$

Důsledek 17.5 Bud' $G = (V, E)$ rovinný graf s $|V| \geq 3$. Potom platí, že $|E| \leq 3|V| - 6$. Víme-li navíc, že G neobsahuje cyklus délky 3 jako podgraf, tak $|E| \leq 2|V| - 4$.

Pozorování 17.6 Grafy K_5 ani $K_{3,3}$ nejsou rovinné.

Definice 17.6 Platónské těleso je konvexní mnohostěn v \mathbb{R}^3 t.ž. každá jeho stěna je ohraničena stejným pravidelným k -úhelníkem, a každý vrchol leží přesně v d stěnách.

Věta 17.7 Platónských těles je celkem jen pět: čtyřstěn ($d = k = 3$), krychle ($d = 3$ a $k = 4$), osmistěn ($d = 4$ a $k = 3$), dvanáctistěn ($d = 3$ a $k = 5$) a dvacetistěn ($d = 5$ a $k = 3$).

18 Přednáška 6. prosince — rovinné grafy #2

Pozorování 18.1 Bud' $G = (V, E)$ graf. G je rovinný $\iff G : e$ je rovinný pro každé $e \in E$.

Definice 18.1 Graf H je podrozdělení grafu G jestliže existuje posloupnost grafů F_0, F_1, \dots, F_k a posloupnost hran e_1, \dots, e_k t.ž. $G \cong F_0$, $H \cong F_k$, $e_i \in E(F_{i-1})$ a $F_i \cong F_{i-1} : e_i$.

Definice 18.2 Řekneme, že graf G obsahuje podrozdělení grafu F jestliže existuje $H \subseteq G$ t.ž. H je podrozdělení F .

Věta 18.2 (Kuratowski) Graf G je rovinný $\iff G$ neobsahuje podrozdělení K_5 a neobsahuje podrozdělení $K_{3,3}$.

Úmluva: kontrakce hran v rámci této kapitoly chápeme “NE-multigrafově”, tzn. jakékoliv případné násobné hrany po kontrakci zredukujeme na násobnost 1. Speciálně, kontrakcí lib. hrany v prostém neorientovaném grafu získáme opět prostý neorientovaný graf.

Pozorování 18.3 Bud' $G = (V, E)$ graf a $e \in E$. G je rovinný $\implies G/e$ je rovinný.

Definice 18.3 Graf H je minor grafu G jestliže existuje posloupnost grafů F_0, F_1, \dots, F_k a posloupnost hran e_1, \dots, e_k t.ž. $F_0 \subseteq G$, $H \cong F_k$, $e_i \in E(F_{i-1})$ a $F_i \cong F_{i-1}/e_i$.

Definice 18.4 Řekneme, že graf G obsahuje H jako minor jestliže H je minor G .

Věta 18.4 (Wagner) Graf G je rovinný $\iff G$ neobsahuje K_5 jako minor a neobsahuje $K_{3,3}$ jako minor.

Definice 18.5 Bud' $G = (V, E)$ a $H = ([k], F)$ dva grafy. Řekneme, že G obsahuje model H jestliže existují V_1, V_2, \dots, V_k po dvou disjunktí podmnožiny V t.ž.

- pro každé $i \in [k]$ množina V_i indukuje v G souvislý podgraf a
- je-li $\{i, j\} \in F$ potom existují $v_i \in V_i$ a $v_j \in V_j$ t.ž. $\{v_i, v_j\} \in E$.

Lemma 18.5 Graf G obsahuje model $H \iff G$ obsahuje H jako minor.

Lemma 18.6 G obsahuje K_5 jako minor $\iff G$ obsahuje podrozdělení K_5 nebo podrozdělení $K_{3,3}$.

Tvrzení 18.7 Wagnerova věta je ekvivalentní Kuratowského větě.

Tvrzení 18.8 Rovinný graf obsahuje vrchol stupně nejvýše 5.

Důsledek 18.9 Je-li graf G rovinný, tak potom $\chi(G) \leq 6$.

Věta 18.10 Je-li graf G rovinný, tak potom $\chi(G) \leq 5$.

Definice 18.6 Bud' $\square G$ topologický rovinný graf a necht' \mathcal{F} jsou stěny $\square G$. Duálním grafem $\square G$ nazveme graf G^* , jehož vrcholy jsou \mathcal{F} a dvě různé stěny $F_1 \in \mathcal{F}$ a $F_2 \in \mathcal{F}$ jsou spojeny v G^* hranou $\iff |\partial F_1 \cap \partial F_2| \geq 1$.

Pozorování 18.11 Duálem topologického rovinného grafu je rovinný graf.

19 Přednáška 7. prosince— Mader, Thomassen

Věta 19.1 (Mader) Každý graf $G = (V, E)$ s $|E| \geq 2^{k-3} \cdot |V|$ obsahuje K_k jako minor.

Důsledek 19.2 Každý graf G s $\chi(G) \geq 2^{k-2} + 1$ obsahuje K_k jako minor.

Lemma 19.3 *Bud' $G = (V, E)$ rovinný 2-souvislý graf a $\square G$ jeho lib. rovinné nakreslení. Potom hranice každé stěny $\square G$ je cyklus v G .*

Pozorování 19.4 *Je-li $G = (V, E)$ k -souvislý graf a $e \in E$, tak potom G/e je $(k - 1)$ -souvislý.*

Lemma 19.5 *Bud' $G = (V, E)$ 3-souvislý graf a $e = \{x, y\} \in E$ t.ž. G/e obsahuje 2-separátor $\{w, z\}$. Potom platí, že (BÚNO) w je vrchol získaný kontrakcí e a $\{x, y, z\}$ je separátor v G .*

Věta 19.6 (Thomassen) *Je-li $G = (V, E)$ 3-souvislý graf s $|V| \geq 5$, tak potom existuje $e \in E$ t.ž. G/e je 3-souvislý.*

20 Přednáška 13. prosince— Brouwer a Ramsey

Pozorování 20.1 K_6 lze nakreslit na Möbiovu pásku.

Definice 20.1 *Bud' $G = (V, E)$ nerovinný graf a uvažme všechna jeho možná nakreslení v \mathbb{R}^2 taková, že žádná hrana svým “vnitřkem” neprochází skrz žádný vrchol. Pro dané nakreslení uvažme počet dvojic křížících se nakreslených hran, a označme tzv. crossing number*

$$\text{cr}(G) := \min_{\text{nakreslení } G} \text{počet dvojic křížících se nakreslených hran.}$$

Věta 20.2 (Crossing lemma) *Pro každý graf $G = (V, E)$, který splňuje $|E| \geq 4|V|$, platí, že*

$$\text{cr}(G) \geq \frac{1}{64} \cdot \frac{|E|^3}{|V|^2}.$$

Věta 20.3 (Spernerovo lemma) *Bud' $\square G$ topologický rovinný graf takový, že každá vnitřní stěna je trojúhelník, a necht' V je jeho množina vrcholů. Dále necht' 1, 2 a 3 jsou nějaké tři vrcholy nakreslené na hranici vnější stěny, a označme si*

- P_{12} cestu po vnější stěně z 1 do 2 neprocházející 3,
- P_{23} cestu po vnější stěně z 2 do 3 neprocházející 1, a
- P_{31} cestu po vnější stěně z 3 do 1 neprocházející 2.

Konečně, necht' $L : V \rightarrow \{1, 2, 3\}$ je zobrazení splňující

- $L(u) \in \{1, 2\}$ pro každé $u \in V(P_{12})$,
- $L(v) \in \{2, 3\}$ pro každé $u \in V(P_{23})$,
- $L(w) \in \{1, 3\}$ pro každé $u \in V(P_{31})$, a
- $L(1) = 1, L(2) = 2, L(3) = 3$.

Potom existuje “ L -duhová” vnitřní stěna $\square G$, tzn. vrcholy a, b, c na její hranici splňují $L(a) = 1, L(b) = 2$ a $L(c) = 3$.

Důsledek 20.4 (Brouwerova věta o pevném bodě pro \mathbb{R}^2) Označme pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník v \mathbb{R}^2 s vrcholy $(0, 0), (0, 1)$ a $(1, 0)$

$$\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \& y \geq 0 \& x + y \leq 1\}.$$

Pro každé spojitě zobrazení $f : \Delta \rightarrow \Delta$ platí, že existuje $x \in \Delta$ t.ž. $f(x) = x$.

Věta 20.5 (Ramseyova věta) Bud' k a ℓ kladná přirozená čísla. Pro každý graf $G = (V, E)$ s $|V| \geq \binom{k+\ell-2}{k-1}$ platí, že $\alpha(G) \geq \ell$ nebo $\omega(G) \geq k$.

Důsledek 20.6 (symetrický Ramsey) Bud' k kladné přirozené číslo. Pro každý graf $G = (V, E)$ s $|V| \geq 4^k$ platí, že $\alpha(G) \geq k$ nebo $\omega(G) \geq k$.

21 Přednáška 14. prosince— Turán

Definice 21.1 Pro každé kladné přirozené k definujeme Ramseyovo číslo $R(k)$ jako nejmenší n takové, že pro každé 2-obarvení $c : E(K_n) \rightarrow \{1, 2\}$ lze najít c -monochromatický úplný podgraf s k vrcholy.

Věta 21.1 (Erdős) Pro každé $k \geq 3$ platí, že $R(k) \geq 2^{k/2}$.

Věta 21.2 (vícebarevný Ramsey) Bud' k a r kladná přirozená čísla. Existuje n takové, že pro každé r -obarvení $c : E(K_n) \rightarrow [r]$ lze najít c -monochromatický úplný podgraf s k vrcholy.

Věta 21.3 (Goodman) Každé 2-obarvení $c : E(K_n) \rightarrow \{1, 2\}$ obsahuje alespoň

$$\frac{n(n-1)(n-5)}{24}$$

monochromatických podgrafů K_3 .

Věta 21.4 (Mantel/Turán) Pro každé $k \geq 2$ platí, že neobsahuje-li graf $G = (V, E)$ podgraf K_{k+1} , tak potom

$$|E| \leq \frac{k-1}{2k} \cdot |V|^2.$$

Tvrzení 21.5 Bud' $G = (V, E)$ graf. Potom

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v)^2 \geq \frac{4|E|}{|V|}.$$

Věta 21.6 (Erdős) Neobsahuje-li graf $G = (V, E)$ podgraf C_4 , tak potom

$$|E| \leq \frac{1}{4} \cdot |V| \cdot \left(1 + \sqrt{4|V| + 1}\right).$$

Věta 21.7 Pro každé prvočíslo p existuje graf $G = (V, E)$ neobsahující podgraf C_4 splňující

$$|V| = p^2 - 1 \quad \text{a zároveň} \quad |E| \geq \frac{(p-1)(p^2-1)}{2}.$$