1 Poměrně dost těžká (dle názoru přednášejícího)

Dokažte, že pro kázdé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 t.ž. následující platí pro všechna $n \geq n_0$:

a) Počet všech nesouvislých grafů na množině vrcholů $[n]$ je menší než $\varepsilon \cdot 2^{\binom{n}{2}}$.

b) Počet všech grafů na množině vrcholů $[n]$ s více než jedním automorfismem je menší než $\varepsilon \cdot 2^{\binom{n}{2}}$.

2 O jedné velmi symetrické třídě grafů

Buď q libovolná mocnina prvočísla splňující $q \equiv 1 \pmod 4$. Graf G_q je zkonstruován tak, že jeho vrcholy jsou všechny prvky q-prvkového konečného tělesa $GF(q)$, a dva vrcholy x a y jsou spojeny hranou právě tehdy, když jejich rozdíl je kongruentní a^2 pro nějaké $a \in GF(q) \setminus \{0\}$.

a) Dokažte, že graf G_q je dobře definovaný, neboli $x - y \equiv a^2 \iff y - x \equiv b^2$ pro nějaká $a, b \in GF(q) \setminus \{0\}$.

b) Dokažte, že pro každou dvojici vrcholů $x, y \in V(G_q)$ platí, že existuje $f_{xy} \in \mathrm{Aut}(G_q)$ t.ž. $f(x) = y$.

c) Dokažte, že $\overline{G_q} \cong G_q$.

3 O souvislém sudém faktoru

Buď $G = (V, E)$ souvislý graf, který obsahuje dvě kostry $T_1 = (V, F_1)$ a $T_2 = (V, F_2)$ splňující $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Dokažte, že G obsahuje sudý faktor, který je souvislý.

4 O bipartitnosti grafu bez trojúhelníku s velkým stupněm

Buď $G = (V, E)$ s minimálním stupněm $\delta(G) > \frac{2|V|}{5}$.

a) Dokažte, že G je buď bipartitní, nebo obsahuje cyklus délky 3.

b) Zkonstruujte nekonečně mnoho navzájem neizomorfních grafů $G = (V, E)$ s minimálním stupněm $\delta(G) = \frac{2|V|}{5}$, které nejsou bipartitní a zároveň neobsahují cyklus délky 3.

5 Efektivní implementace grafového algoritmu

Pro splnění této úlohy stačí vyřešit jednu (libovolnou) ze dvou podčástí.

Naprogramujte ve Vašem oblíbeném programovacím jazyce řešení následující algoritmické úlohy. Vámi vybraný programovací jazyk **musí** mít volně dostupný překladač a/nebo interpret ve standardních repozitářích linuxové distribuce Debian. Odevzdává se pouze zdrojový kód Vašeho programu. V případě nejasností ohledně Vámi vybraného programovacího jazyka prosím kontaktujte přednášejícího.

V rámci vybraného programovacího jazyka smíte používat jeho standardní knihovny, nesmíte však použít již předpřipravený grafový algoritmus pro Vámi vybranou úlohu (např. tedy **nelze** volat problém řešící funkci z "The Boost Graph Library" pro C++). V případě jakýchkoliv nejasností prosím kontaktujte přednášejícího předtím, než začnete programovat.

1) Pro daný vážený graf $G = (V, E, w)$ spočtěte váhu minimální kostry G.

2) Pro daný vážený graf $G = (V, E, w)$ splňující $w(e) \geq 0$ pro každou hranu $e \in E$ spočtěte průměr G, tj. $\max_{x\in V, y\in V} \operatorname{dist}_G(x, y)$.

Efektivitu Vaší implementace lze otestovat na `http://sparrow.fjfi.cvut.cz/gralg/` ; Vaše řešení bude považováno za efektivní, jestliže správně vyřeší "středně těžké" úlohy na běžném laptopu do 30 sekund.

6 Vysoce pravidelné grafy

Připomeňme (viz. úloha 5 z 3. série DCV), že pro graf $G = (V, E)$ značíme $g(G)$ délku nejkratšího cyklu, který G obsahuje. Dokažte, že pokud existuje d-regulární graf s $d^2 + 1$ vrcholy a $g(G) = 5$, potom $d \in \{2, 3, 7, 57\}$.
Poznamenejme, že existence 57*-regulárního grafu s* 3250 *vrcholy a* $g(G) = 5$ *nebyla doposud nikým ani dokázána, ani vyvrácena.*

7 Vlastní čísla a počty hran z podmnožiny vrcholů

Buď $G = (V, E)$ regulární graf a nechť $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ je jeho spektrum. Dokažte, že pro každou množinu $S \subseteq V$ platí, že počet hran s právě jedním koncem v S splňuje následující nerovnost:

$$|\{e \in E : |e \cap S| = 1\}| \geq \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)|S||V \setminus S|}{|V|}.$$

8 O dlouhé cestě v grafech s velkým min stupněm

a) Pro každý souvislý graf $G = (V, E)$ dokažte, že G obsahuje cestu délky $\min\{2\delta(G), |V| - 1\}$.

b) Pro každé přirozené $\delta \geq 1$ zkonstruujte nekonečně velkou množinu souvislých grafů $\mathcal{G}_\delta$ takovou, že každý $G \in \mathcal{G}_\delta$ splňuje $\delta(G) = \delta$ a zároveň G neobsahuje žádnou cestu délky $2\delta + 1$.

9 O stromech v grafech s hodně hranami

Buď $k \geq 2$, $G = (V, E)$ graf splňující $|E| \geq (k-1)|V|$ a nechť T je libovolný strom s $k+1$ vrcholy. Dokažte, že G obsahuje T jako podgraf.

10 κ a α vs. Hamiltonovské kružnice

Připomeňme, že $\kappa(G)$ značí vrcholovou souvislost grafu G a $\alpha(G)$ značí velikost největší nezávislé množiny v G.

Dokažte, že každý graf $G = (V, E)$ s $|V| \geq 3$ splňující $\kappa(G) \geq \alpha(G)$ obsahuje Hamiltonovskou kružnici.