Teorie grafů

ZS 2024/25, FJFI ČVUT

5. domácí úlohy

Deadline: 14.11.2024 11:59:59 středoevropského zimního času

– –

1) Pro všechny dvojice $a, b \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ určete počet koster úplného bipartitního grafu $K_{a,b}$.

2a) Buď $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Dokažte, že každý 2^{k+1}-regulární graf $G = (V, E)$ obsahuje faktor $H = (V, F)$, který je 2^k-regulární.

2b) Dokažte, že množinu hran libovolného 2^{k+1}-regulárního grafu $G = (V, E)$ lze rozdělit na 2^k disjunktních částí $F_1, F_2, \ldots, F_{2^k}$ tak, že graf (V, F_i) je 2-regulární pro všechna $i \in [2^k]$.

3) Pro každé $k \geq 2$, nalezněte charakterizující podmínku pro souvislé multigrafy $G = (V, E_M)$, které lze "nakreslit" pomocí k tahů, a zároveň $k-1$ či méně tahů nestačí. Jinými slovy, v G existuje k hranově disjunktních tahů $T_1, \ldots, T_k$ takových, že součet jejich délek je roven $|E_M|$, a zároveň v G neexistuje $\leq k-1$ hranově disjunktních tahů, jejichž délky se sčítají na $|E_M|$.

(Hint: inspirujte se přednáškou, kde se dokazoval případ $k = 1$.)

4) Pro graf $G = (V, E)$ označme G^k graf (V, E_k), kde $E_k := \{\{x, y\} : \mathrm{dist}_G(x, y) \leq k\}$.

   a) Pro každý souvislý graf $G = (V, E)$ a dva vrcholy $u, w \in V$ dokažte, že G^3 obsahuje tzv. Hamiltonovskou cestu z u do w, tj. cestu délky $|V| - 1$ jejímiž konci jsou u a w.

   b) Pro každou hranu $e \in E(G^3)$ ukažte, že v G^3 existuje Hamiltonovský cyklus obsahující hranu e.

5) Buď $G = (V, E)$ graf. Připomeňme z přednášky relaci $\sim_B$ na množině hran E, kde $e \sim_B f$ jestliže $e = f$ nebo e a f leží na nějakém společném cyklu v G. Již víme, že $\sim_B$ je ekvivalence a její třídy nazýváme *bloky grafu G*. Nechť k je počet tříd ekvivalence $\sim_B$ a

$$B_1 \dot{\bigcup} \cdots \dot{\bigcup} B_k$$

je rozklad E na příslušné bloky. Položme $V_i := \bigcup_{e \in B_i} e$ pro každé $i \in [k]$, jinými slovy, nechť V_i jsou přesně ty vrcholy, jež jsou koncem nějaké hrany z B_i.

   a) Dokažte, že $|V_i \cap V_j| \leq 1$ pro každé $i \neq j$.

   b) Dokažte, že $v \in V$ leží ve dvou ruzných množinách V_i a V_j právě tehdy když v je artikulace G.