Teorie grafů

ZS 2024/25, FJFI ČVUT

6. domácí úlohy

Deadline: 28.11.2024 11:59:59 středoevropského zimního času

---

1) Orientací (neorientovaného) grafu $G = (V, E)$ rozumíme libovolné zobrazení $o : E \to V$ splňující $o(e) \in e$ pro každé $e \in E$. Orientaci grafu interpretujeme tak, že každá hrana e získala svůj *start*, který odpovídá vrcholu $o(e)$, a *cíl*, který odpovídá opačnému konci e než je $o(e)$.

   Orientaci grafu nazveme *silně souvislou* jestliže v příslušném orientovaném grafu (V, E, o) pro každou uspořádanou dvojicí jeho vrcholů u a w existuje *orientovaná cesta* z u do w, tj. cesta $u = v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k = w$, kde $\{v_0, \ldots, v_k\} \subseteq V$, $\{e_1, \ldots, e_k\} \subseteq E$, a $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ splňující $o(e_i) = v_{i-1}$ pro každé $i \in [k]$.

1a) Dokažte, že každý vrcholově-2-souvislý graf má silně souvislou orientaci.

1b) Dokažte, že každý hranově-2-souvislý graf má silně souvislou orientaci.

2) Připomeňme, že pro daný graf $G = (V, E)$ značí $\kappa(G)$ maximální k t.ž. G je vrcholově k-souvislý, a analogicky $\kappa'(G)$ značí maximální ℓ t.ž. G je hranově k-souvislý.

   Pro každou dvojici přirozených čísel k a ℓ splňujících $\ell \geq k \geq 1$ zkonstruujte nekonečně mnoho grafů s $\kappa(G) = k$ a $\kappa'(G) = \ell$.

3) Pro každý 3-regulární graf G dokažte, že $\kappa(G) = \kappa'(G)$.

4) Buď $k \geq 2$, $G = (V, E)$ k-souvislý graf a $X \subseteq V$ velikosti k. Dokažte, že G obsahuje cyklus C, na kterém leží všechny vrcholy X (jinými slovy, $X \subseteq V(C)$).

5) Buď $G = (V, E_M)$ multigraf a $u, w \in V$ jeho dva různé vrcholy. Poté uvažte $L(G)$ tzv. *hranograf* (anglicky line-graph) multigrafu G, který je definován následovně:

   - vrcholy $L(G)$ jsou prvky E_M (tzn. hrany G včetně jejich násobností), a
   - $e, f \in E_M$ jsou spojeny hranou v $L(G)$ právě tehdy, když $|e \cap f| \geq 1$.

   Konečně uvažte graf H, který se získá z grafu $L(G)$ přidáním dvou nových vrcholů s a t, kde vrchol s spojíme v H hranou s $\{e \in E_M : u \in e\}$, a analogicky vrchol t spojíme hranou s $\{f \in E_M : w \in f\}$.

5a) Dokažte, že $p'_G(u, w) = p_H(s, t)$.

5b) Dokažte, že $c'_G(u, w) = c_H(s, t)$.

(Speciálně hranovou verzi Mengera lze považovat za snadný důsledek vrcholové verze.)