

7. domácí úlohy

Deadline: 5.12.2024 11:59:59 středoevropského zimního času

- 1) Buď $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že každý $2k$ -regulární graf $G = (V, E)$ obsahuje faktor $H = (V, F)$, který je 2-regulární.
- 2) Čtvercovou matici $n \times n$, kde každá buňka obsahuje přirozené číslo mezi 1 a n , nazvěme *latinským čtvercem* jestliže v každém řádku je každé číslo právě jednou, a v každém sloupci je každé číslo právě jednou. Podobně *latinský obdélník* značí matici s rozměry $m \times n$, kde každá buňka obsahuje přirozené číslo mezi 1 a n , v každém řádku najdeme každé číslo právě jednou, a v každém sloupci najdeme každé číslo nejvýše jednou.

Dokažte, že každý latinský obdélník s m řádky lze doplnit o $n - m$ nových řádků tak, že výsledná $n \times n$ matice je latinský čtverec.

- 3) Buď G bipartitní graf s partitami A a B . Dokažte, že

$$\min_{S \subseteq A} |A| - |S| + |N_G(S)| = \nu(G) = \min_{T \subseteq B} |B| - |T| + |N_G(T)|.$$

- 4) Pro každé přirozené $k \geq 4$ dokažte, že k -regulární graf $G = (V, E)$ s $\kappa'(G) \geq k - 1$ má perfektní párování.
- 5) Buď $G = (V, E)$ 3-regulární graf bez mostů.
 - a) Dokažte, že pro každou $f \in E$ existuje v G perfektní párování M t.ž. $f \in M$.
 - b) Dokažte, že pro každé dvě hrany $f_1, f_2 \in E$ existuje v G perfektní párování M t.ž. $\{f_1, f_2\} \cap M = \emptyset$.