Teorie grafů

ZS 2024/25, FJFI ČVUT

9. domácí úlohy

Deadline: 19.12.2024 11:59:59 středoevropského zimního času

– –

1) Dokažte, že každý graf $G = (V, E)$ s minimálním stupněm $\delta(G) \geq 1$ má dominující množinu velikosti nejvýše $\left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor$.
(Jen mezi řečí — to dává pro $\delta \leq 5$ lepší výsledek než věta z přednášky!)

2) Dokažte, že každý graf $G = (V, E)$ obsahuje bipartitní faktor $H = (V, F)$ takový, že $|F| \geq \frac{|E|}{2}$ a zároveň velikosti partit H jsou rovny $\left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor$ a $\left\lceil \frac{|V|}{2} \right\rceil$.

3) Buď $G = (V, E)$ graf. Dokažte, že

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{\deg_G(v) + 1}\,.$$

4) Buď $R(k, \ell)$ nejmenší možné přirozené číslo n takové, že každý graf G s n vrcholy splňuje $\omega(G) \geq k$ nebo $\alpha(G) \geq \ell$.

a) Dokažte, že $R(3, 4) \leq 9$.

b) Pomocí (a) odvoďte, že $R(4, 4) \leq 18$.

Poznamenejme, že existují grafy dokazující $R(3, 4) = 9$ resp. $R(4, 4) = 18$.

5) Buď r kladné přirozené číslo, a nechť $R_r(3)$ označuje nejmenší n takové, že pro každé zobrazení $c : E(K_n) \to [r]$ existují tři různá $i, j, k \in [n]$ taková, že $c(\{i, j\}) = c(\{j, k\}) = c(\{i, k\})$.

a) Dokažte, že $2^r < R_r(3)$.

b) Dokažte, že $3 \cdot r! \geq R_r(3)$.