

1 Poměrně dost těžká (dle názoru přednášejícího)

Dokažte, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 t.ž. následující platí pro všechna $n \geq n_0$:

- a) Počet všech nesouvislých grafů na množině vrcholů $[n]$ je menší než $\varepsilon \cdot 2^{\binom{n}{2}}$.
- b) Počet všech grafů na množině vrcholů $[n]$ s více než jedním automorfismem je menší než $\varepsilon \cdot 2^{\binom{n}{2}}$.

2 O jedné velmi symetrické třídě grafů

Bud' q libovolná mocnina prvočísla splňující $q \equiv 1 \pmod{4}$. Graf G_q je zkonstruován tak, že jeho vrcholy jsou všechny prvky q -prvkového konečného tělesa $GF(q)$, a dva vrcholy x a y jsou spojeny hranou právě tehdy, když jejich rozdíl je kongruentní a^2 pro nějaké $a \in GF(q) \setminus \{0\}$.

- a) Dokažte, že graf G_q je dobře definovaný, neboli $x - y \equiv a^2 \iff y - x \equiv b^2$ pro nějaká $a, b \in GF(q) \setminus \{0\}$.
- b) Dokažte, že pro každou dvojici vrcholů $x, y \in V(G_q)$ platí, že existuje $f_{xy} \in \text{Aut}(G_q)$ t.ž. $f(x) = y$.
- c) Dokažte, že $\overline{G_q} \cong G_q$.

3 O souvislém sudém faktoru

Bud' $G = (V, E)$ souvislý graf, který obsahuje dvě kostry $T_1 = (V, F_1)$ a $T_2 = (V, F_2)$ splňující $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Dokažte, že G obsahuje sudý faktor, který je souvislý.

4 O bipartitnosti grafu bez trojúhelníku s velkým stupněm

Bud' $G = (V, E)$ s minimálním stupněm $\delta(G) > \frac{2|V|}{5}$.

- a) Dokažte, že G je buď bipartitní, nebo obsahuje cyklus délky 3.
- b) Zkonstruuje nekonečně mnoho navzájem neizomorfních grafů $G = (V, E)$ s minimálním stupněm $\delta(G) = \frac{2|V|}{5}$, které nejsou bipartitní a zároveň neobsahují cyklus délky 3.

5 Efektivní implementace grafového algoritmu

Pro splnění této úlohy stačí vyřešit jednu (libovolnou) ze dvou podčástí.

Naprogramujte ve Vašem oblíbeném programovacím jazyce řešení následující algoritmické úlohy. Vámi vybraný programovací jazyk **musí** mít volně dostupný překladač a/nebo interpret ve standardních repozitářích linuxové distribuce Debian. Odevzdává se pouze zdrojový kód Vašeho programu. V případě nejasností ohledně Vámi vybraného programovacího jazyka prosím kontaktujte přednášejícího.

V rámci vybraného programovacího jazyka smíte používat jeho standardní knihovny, nesmíte však použít již předpřipravený grafový algoritmus pro Vámi vybranou úlohu (např. tedy **nelze** volat problém řešící funkci z “The Boost Graph Library” pro C++). V případě jakýchkoliv nejasností prosím kontaktujte přednášejícího předtím, než začnete programovat.

- 1) Pro daný vážený graf $G = (V, E, w)$ spočítejte váhu minimální kostry G .
- 2) Pro daný vážený graf $G = (V, E, w)$ splňující $w(e) \geq 0$ pro každou hranu $e \in E$ spočítejte průměr G , tj. $\max_{x \in V, y \in V} \text{dist}_G(x, y)$.

Efektivitu Vaší implementace lze otestovat na <http://sparrow.fjfi.cvut.cz/gralg/>; Vaše řešení bude považováno za efektivní, jestliže správně vyřeší “středně těžké” úlohy na běžném laptopu do 30 sekund.

6 Vysoce pravidelné grafy

Připomeňme (viz. úloha 5 z 3. série DCV), že pro graf $G = (V, E)$ značíme $g(G)$ délku nejkratšího cyklu, který G obsahuje. Dokažte, že pokud existuje d -regulární graf s $d^2 + 1$ vrcholy a $g(G) = 5$, potom $d \in \{2, 3, 7, 57\}$.

Poznamenejme, že existence 57-regulárního grafu s 3250 vrcholy a $g(G) = 5$ nebyla dosud nikým ani dokázána, ani vyvrácena.

7 Vlastní čísla a počty hran z podmnožiny vrcholů

Bud' $G = (V, E)$ regulární graf a necht' $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ je jeho spektrum. Dokažte, že pro každou množinu $S \subseteq V$ platí, že počet hran s právě jedním koncem v S splňuje následující nerovnost:

$$|\{e \in E : |e \cap S| = 1\}| \geq \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)|S||V \setminus S|}{|V|}.$$

8 O dlouhé cestě v grafech s velkým min stupněm

- a) Pro každý souvislý graf $G = (V, E)$ dokažte, že G obsahuje cestu délky $\min\{2\delta(G), |V| - 1\}$.

- b) Pro každé přirozené $\delta \geq 1$ zkonstruuje nekonečně velkou množinu souvislých grafů $\mathcal{G}_\delta$ takovou, že každý $G \in \mathcal{G}_\delta$ splňuje $\delta(G) = \delta$ a zároveň G neobsahuje žádnou cestu délky $2\delta + 1$.

9 O stromech v grafech s hodně hranami

Bud' $k \geq 2$, $G = (V, E)$ graf splňující $|E| \geq (k-1)|V|$ a nechť T je libovolný strom s $k+1$ vrcholy. Dokažte, že G obsahuje T jako podgraf.

10 κ a α vs. Hamiltonovské kružnice

Připomeňme, že $\kappa(G)$ značí vrcholovou souvislost grafu G a $\alpha(G)$ značí velikost největší nezávislé množiny v G .

Dokažte, že každý graf $G = (V, E)$ s $|V| \geq 3$ splňující $\kappa(G) \geq \alpha(G)$ obsahuje Hamiltonovskou kružnici.

11 (Ne?)párovací úloha

Mějme graf $G = (V, E)$ a $F \subseteq E$ libovolnou podmnožinu hran. Nechť $G_1 := (V, F)$ značí faktor G určený hranami F , a označme $A_1, A_2, \dots, A_k$ komponenty souvislosti G_1 . Analogicky, buď $G_2 := (V, E \setminus F)$, a $B_1, B_2, \dots, B_\ell$ komponenty souvislosti G_2 . Označme $\text{mc}(G, F)$ velikost nejmenší možné množiny $\mathcal{S} \subseteq \{A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_\ell\}$, která splňuje, že pro každý vrchol $v \in V$ existuje komponenta $C \in \mathcal{S}$ splňující $v \in C$. Konečně, definujme $\text{mc}(G) := \max_{F \subseteq E} \text{mc}(G, F)$.

- Dokažte, že pokud G není úplný, tak $\text{mc}(G) \geq 2$.
- Pro každé $k \in \mathbb{N}$ zkonstruuje souvislý graf $G = (V, E)$ takový, že $\alpha(G) = k$ a zároveň $\text{mc}(G) = 2$.
- Dokažte nerovnost $\text{mc}(G) \leq \alpha(G)$.

Hint: Pro pevné $F \subseteq E$ uvažte pomocný bipartitní graf, kde jedna partita odpovídá komponentám souvislosti faktoru (V, F) , druhá partita komponentám souvislosti faktoru $(V, E \setminus F)$, a dvě komponenty spojíte hranou právě tehdy, když mají alespoň jeden společný vrchol.

12 Multigrafová verze Vizingovy věty

Dokažte, např. zobecněním důkazu grafové verze Vizingovy věty, že $\chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$ pro každý multigraf G .

13 Barevnost grafu s omezenou klikovostí

Pro každé přirozené $k \geq 2$ dokažte, že existuje konstanta $C_k > 0$ t.ž. každý n -vrcholový graf G s $\omega(G) = k$ splňuje $\chi(G) \leq C_k \cdot n^{1-\frac{1}{k}}$.

14 Husté grafy bez $K_{s,t}$

Pro každé přirozené $s \geq 2$ a $t \geq 2$ dokažte, že existuje konstanta $C_{s,t} > 0$ t.ž. existuje graf $G = (V, E)$, který neobsahuje $K_{s,t}$ jako podgraf, a splňuje

$$|E| \geq C_{s,t} \cdot |V|^{2-\frac{s+t-2}{st-1}}.$$

15 Totální chaos je nemožný

Pro každá přirozená $r \geq 2$, $\ell \geq 2$ a $k \geq \ell$ dokažte, že existuje N t.ž. platí následující: ke každému $c : \binom{[N]}{\ell} \rightarrow [r]$ existuje $S \subseteq [N]$ splňující $|S| \geq k$ a $c(X) = c(Y)$ pro každé $X, Y \in \binom{S}{\ell}$.

16 Počet K_4 vůči počtu hran

Pro každý graf $G = (V, E)$ dokažte, že počet čtveřic vrcholů $\{a, b, c, d\} \in \binom{V}{4}$ t.ž. $\{a, b, c, d\}$ indukují K_4 je alespoň

$$\frac{|E| \cdot (4|E| - |V|^2) \cdot (3|E| - |V|^2)}{6|V|^2}.$$

17 Variace na Hadwiger s $\alpha(G)$ namísto $\chi(G)$

Dokažte, že každý graf G obsahuje K_t , pro $t = \left\lceil \frac{|V(G)|}{2\alpha(G)-1} \right\rceil$, jako minor.

18 Hodně hran zaručuje podrozdělení K_k

Bud' $G = (V, E)$ graf splňující

$$|E| \geq 2^{\binom{k}{2}-1} \cdot |V|.$$

Dokažte, že G obsahuje podrozdělení K_k .