Kapitánův deník z Teorie grafů 01TG (ZS 2024)

24. září — úvod

Definice 1.1 *Graf $G = (V, E)$ je uspořádaná dvojice: nějaká konečná množina vrcholů V, a množina hran E, pro kterou platí $E \subseteq \binom{V}{2}$. Často budeme jako množinu V volit $[n]$.*

Obšírněji je naše definice grafu v některých zdrojích označována jako *prostý neorientovaný graf.*

Definice 1.2 *Pro daný graf G značíme $V(G)$ jeho množinu vrcholů a $E(G)$ jeho množinu hran.*

Definice 1.3 *Nulový graf je graf $(\emptyset, \emptyset)$. Nenulový graf je graf, který není nulový.*

Definice 1.4 *Buď $G = (V, E)$ graf.* Doplňkem grafu G *označujeme graf $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$.*

Definice 1.5 *Buď $G = (V, E)$ graf, $u \in V$ a $e \in E$. Řekneme, že u je incidentní s e, jestliže $u \in e$. Analogicky, pro $f \in E$ t.ž. $e \neq f$ řekneme, že e je incidentní s f, jestliže $|e \cap f| = 1$.*

Definice 1.6 *Pro daný graf $G = (V, E)$ a vrchol $u \in V$, označme $N_G(u)$* sousedství u v G, *kde*

$$N_G(u) := \{w \in V : \{u, w\} \in E\}.$$

Prvkům množiny $N_G(u)$ říkáme sousedé u; $\deg_G(u) := |N_G(u)|$ *říkáme stupeň u.*

Věta 1.1 (Princip sudosti neboli "Handshaking lemma") *Pro každý graf $G = (V, E)$ platí, že*

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|.$$

Definice 1.7 *Pro daný graf G na (uspořádané) množině vrcholů $[n]$ definujeme skoré grafu jako posloupnost přirozených čísel $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ t.ž. $d_i = \deg_G(i)$ pro každé $i \in [n]$.*

Pozorování 1.2 *Buď* $\pi \in S_n$ *permutace. Posloupnost* $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ *je skóre nějakého grafu*

$$\Longleftrightarrow$$

$(d_{\pi(1)}, d_{\pi(2)}, \dots, d_{\pi(n)})$ *je skóre nějakého grafu.*

Věta 1.3 *Buď* $0 \le d_1 \le d_2 \le \dots \le d_n \le n-1$. *Posloupnost* $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ *je skóre nějakého grafu*

$$\Longleftrightarrow$$

$(d_1, d_2, \dots, d_{n-d_n-1}, \underbrace{d_{n-d_n} - 1, \dots, d_{n-1} - 1}_{d_n \text{ členů}})$ *je skóre nějakého grafu.*

25. září — pokračování úvodu

Definice 2.1 *Isomorfismus dvou grafů $G = (V, E)$ a $H = (W, F)$ je bijekce $f : V \to W$ t.ž.*

$$\{u, w\} \in E \iff \{f(u), f(w)\} \in F \quad \textit{pro každé dva různé } u, w \in V.$$

O dvojici grafů, pro které existuje isomorfismus, řekneme, že jsou isomorfní, a značíme $G \cong H$.

Definice 2.2 *Automorfismus grafu $G = (V, E)$ je bijekce $f : V \to V$ taková, že jde o isomorfismus G a G, neboli*

$$\{u, w\} \in E \iff \{f(u), f(w)\} \in E \quad \textit{pro každé dva různé } u, w \in V.$$

Množinu všech automorfismů grafu G značíme $\mathrm{Aut}(G)$.

Pozorování 2.1 *Pro každý graf G, množina* $\mathrm{Aut}(G)$ *s operací skládání tvoří grupu.*

Definice 2.3 *Graf G nazveme* strnulým*, jestliže $|\mathrm{Aut}(G)| = 1$.*

Věta 2.2 *Buď $\mathcal{G}_n$ množina všech po dvou neisomorfních grafů s n vrcholy. Platí, že*

$$\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!} \leq |\mathcal{G}_n| \leq 2^{\binom{n}{2}}$$

Definice 2.4 *Sled v grafu $G = (V, E)$ z vrcholu $u \in V$ do vrcholu $w \in V$ je posloupnost*

$$u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots v_{k-1}, e_k, v_k = w$$

taková, že

- *$v_i \in V$ pro každé $i \in [k-1]$,*
- *$e_i \in E$ pro každé $i \in [k]$, a*
- *$e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ pro každé $i \in [k]$.*

Definice 2.5 *Tah v grafu G z u do w je sled v G z u do w takový, že každá hrana G je v něm obsažena nejvýše jednou.*

Definice 2.6 *Cesta v grafu G z u do w je sled v G z u do w takový, že každý vrchol G je v něm obsažen nejvýše jednou. Speciálně, z definice plyne, že každá cesta je také tahem.*

Poznámka — nebudeme-li chtít explicitně zdůraznit koncové vrcholy sledu resp. tahu resp. cesty, budeme mluvit pouze o *sledu v grafu* resp. *tahu v grafu* resp. *cestě v grafu.*

Pozorování 2.3 *Buď $G = (V, E)$ graf a $u \in V, w \in V$ jeho dva vrcholy. Platí, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *Existuje sled v G z vrcholu u do vrcholu w,*
2. *Existuje cesta v G z vrcholu u do vrcholu w.*

Definice 2.7 *Pro nenulový graf $G = (V, E)$, uvažujme následující relaci $\rightsquigarrow$ na V: pro $u, w \in V$ definujme $u \rightsquigarrow w$ právě když existuje cesta v G z u do w.*

Tvrzení 2.4 *(DÚ) Pro každý graf $G = (V, E)$ je $\rightsquigarrow$ ekvivalencí na V.*

Definice 2.8 *Pro daný graf G budeme třídám ekvivalence $\rightsquigarrow$ říkat komponenty souvislosti G. Počet komponent souvislosti budeme značit* $\mathrm{comp}(G)$.

Definice 2.9 *Nenulový graf G nazveme souvislý, jestliže $\mathrm{comp}(G) = 1$. Pokud nenulový graf není souvislý, neboli $\mathrm{comp}(G) \geq 2$, tak budeme říkat, že je nesouvislý.*

Věta 2.5 *Pro každé přirozené $n \geq 1$ platí, že*

$$2^{\binom{n}{2}} = \sum_{i \in [n]} \binom{n-1}{i-1} \cdot s_i \cdot 2^{\binom{n-i}{2}},$$

kde s_i označuje počet souvislých grafů na množině $[n]$.

Definice 2.10 *Katalog základních grafů:*

1. *Pro $n \geq 1$, úplný graf na n vrcholech — $K_n := \left([n], \binom{[n]}{2}\right)$.*
2. *Pro $n \geq 1$, prázdný graf na n vrcholech — $E_n := ([n], \emptyset)$.*
3. *Pro $n \geq 1$, cesta na n vrcholech (též cesta délky $n-1$) — $P_n := \big([n], \big\{\{i, i+1\} : i \in [n-1]\big\}\big)$.*
4. *Pro $n \geq 3$, cyklus na n vrcholech (též cyklus délky n) — $C_n := \big([n], E(P_n) \cup \big\{\{n, 1\}\big\}\big)$.*

Definice 2.11 *Buď $G = (V, E)$ graf. Graf $H = (W, F)$ nazveme podgrafem G, a budeme značit $H \subseteq G$, jestliže*

1. *$W \subseteq V$ a*
2. *$F \subseteq E \cap \binom{W}{2}$.*

Definice 2.12 *Podgraf H nazveme indukovaným podgrafem G, jestliže $F = E \cap \binom{W}{2}$.*

Definice 2.13 *Podgraf H nazveme faktorem G, jestliže $W = V$.*

Definice 2.14 *Cyklem v grafu G rozumíme podgraf $H \subseteq G$ t.ž. $H \cong C_k$ pro nějaké $k \geq 3$.*

1. října — stromy

Definice 3.1 *Pro $G = (V, E)$ graf definujeme:*

1. *minimální stupeň G s označením $\delta(G) := \min_{v \in V} \deg_G(v)$,*
2. *maximální stupeň G s označením $\Delta(G) := \max_{v \in V} \deg_G(v)$, a*
3. *průměrný stupeň G s označením $\operatorname{avg}\deg(G) := \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} \deg_G(v) = \frac{2|E|}{|V|}$.*

Definice 3.2 *Buď $G = (V, E)$ graf, $v \in V$ a $e \in E$.*

1. *Podgraf G indukovaný $V \setminus \{v\}$ budeme zkráceně zapisovat jako $G - v$.*
2. *Faktor G s množinou hran $E \setminus \{e\}$ budeme zkráceně zapisovat jako $G - e$.*

Definice 3.3 *Buď $G = (V, E)$ graf a $e \in E$. Hranu e nazveme mostem v G, jestliže $\operatorname{comp}(G - e) = \operatorname{comp}(G) + 1$.*

Lemma 3.1 *Buď $G = (V, E)$ graf a $e \in E$. Platí následující ekvivalence: Hrana e je most v G $\iff$ e není obsažena v žádném cyklu G.*

Věta 3.2 *Buď $G = (V, E)$ nenulový graf. Potom následující definice jsou navzájem ekvivalentní:*

1. *G souvislý a neobsahuje cyklus,*
2. *pro každé $x \in V$ a $y \in V$ existuje právě jedna cesta v G z x do y,*
3. *G souvislý a každý tah v G je cestou,*
4. *G je do inkluze vůči hranám maximální graf neobsahující cyklus,*
5. *G je do inkluze vůci hranám minimální graf, který je souvislý,*
6. *G je souvislý a $|V| = |E| + 1$.*

Definice 3.4 *Graf $G = (V, E)$ nazveme stromem, jestliže je souvislý a nebsahuje cyklus.*

Definice 3.5 *Je-li $G = (V, E)$ graf a $v \in V$ t.ž. $\deg_G(v) = 1$, potom v nazveme listem G.*

Lemma 3.3 *Každý strom s alespoň 2 vrcholy obsahuje alespoň 2 listy.*

Pozorování 3.4 *Buď* $G = (V, E)$ *souvislý graf a* $v \in V$ *list* G. *Platí, že* $G - v$ *je souvislý.*

Definice 3.6 *Buď* $G = (V, E)$ *souvislý graf. Faktor* $(V, F) \subseteq G$ *nazveme kostrou* G, *jestliže* (V, F) *je strom.*

2. října — Cayleyho formule

Definice 4.1 *Buď τ_n počet všech stromů na množině vrcholů $[n]$. Jinými slovy, τ_n značí počet koster K_n.*

Věta 4.1 (Cayleho formule) *Pro každé $m \geq 2$ platí, že $\tau_n = n^{n-2}$.*

Důsledek 4.2 *Počet neisomorfních stromů s n vrcholy je alespoň*

$$\frac{1 - o(1)}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^n}{n^{5/2}}.$$

Věta 4.3 *Počet neisomorfních stromů s n vrcholy je nejvýše 4^n.*

Definice 4.2 *Pro graf $G = (V, E)$ a $e \in \binom{V}{2} \setminus E$ označme $G+e$ graf $(V, E \cup \{e\})$.*

Pozorování 4.4 *Buď $G = (V, E)$ souvislý graf, $T = (V, F)$ nějaká jeho kostra a $e \in E \setminus F$. Potom $T + e$ obsahuje právě jeden cyklus C_e^T.*

Definice 4.3 *Cyklus C_e^T z předcházejícího pozorování nazveme fundamentální cyklus (hrany) e v (grafu) G vůči (kostře) T.*

Pozorování 4.5 *Buď $G = (V, E)$ souvislý graf, $T = (V, F)$ nějaká jeho kostra, $e \in E \setminus F$ a $f \in E(C_e^T)$. Potom $(T + e) - f$ je kostra G.*

Definice 4.4 *Buď $G = (V, E)$ graf. Faktor $H \subseteq G$ určený množinou hran $F \subseteq E$ nazveme sudým faktorem G, jestliže pro každý $v \in V$ platí, že $\deg_H(v)$ je sudé.*

Definice 4.5 *Buď $G = (V, E)$ graf s libovolně zafixovaným pořadím hran, neboli $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Každou $F \subseteq E$ si můžeme skrz její 0/1-ový charakteristický vektor $\vec{v}_F$ představit jako prvek vektorového prostoru $\mathbb{Z}_2^m$.*

Definice 4.6 *Pro graf $G = (V, E)$ definujme* prostor cyklů G *předpisem*

$$\mathcal{C}_G := \{\vec{v}_F : F \text{ sudý faktor } G\}.$$

Tvrzení 4.6 *Pro každý graf $G = (V, E)$ je $\mathcal{C}_G$ vektorový podprostor $\mathbb{Z}_2^m$.*

Věta 4.7 *Buď* $G = (V, E)$ *souvislý graf,* T *jeho libovolná kostra, a nechť* $C_1, C_2, \ldots, C_{|E|-|V|+1}$ *jsou všechny fundamentální cykly v* G *vůči* T*. Charakteristické vektory těchto* $|E| - |V| + 1$ *cyklů tvoří bázi prostoru* $\mathcal{C}_G$*.*

8. října — Kruskalův a Dijkstrův algoritmus

Definice 5.1 *Vážený graf $G_w = (V, E, w)$ je uspořádaná trojice, kde (V, E) je graf a $w : E \to \mathbb{R}$.*

Tvrzení 5.1 *Buď $G = (V, E)$ souvislý graf a $w : E \to \mathbb{R}$ prostá funkce. Potom má vážený graf (V, E, w) právě jednu kostru $T_{\min}$ t.ž.*

$$\sum_{e \in E(T_{\min})} w(e) = \min_{\textit{kostra } T} \sum_{f \in E(T)} w(f).$$

Kostře $T_{\min}$ říkáme minimální kostra (MST) váženého grafu (V, E, w).

Lemma 5.2 *Buď $G = (V, E)$ souvislý graf, $w : E \to \mathbb{R}$ prostá funkce a $C \subseteq G$ cyklus v G. Je-li $T_{\min}$ MST a e hrana C s největší hodnotou $w(e)$, potom $e \notin E(T_{\min})$.*

Věta 5.3 (O Kruskalově algoritmu) *Buď $G = (V, E)$ souvislý graf a $w : E \to \mathbb{R}$ prostá funkce. Seřadíme-li hrany $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ dle vah w vzestupně a budeme-li v tomto pořadí přidávat hrany e_i do T za podmínky zachování acykličnosti, výsledkem je, že T je MST váženého grafu (V, E, w).*

Definice 5.2 *Pro vážený graf $G_w = (V, E, w)$ a cestu $P = v_0, e_1, v_1, \ldots, e_\ell, v_\ell$ v G_w definujme*

$$w(P) := \sum_{i \in [\ell]} w(e_i).$$

Definice 5.3 *Bůď $G_w = (V, E, w)$ vážený graf a $u, v \in V$ dva jeho (ne nutně různé) vrcholy. Vdáleností u a v v G_w, kterou budeme značit $\operatorname{dist}_{G_w}(u, v)$, je $\min_{P \in \mathcal{P}_{uv}} w(P)$, kde $\mathcal{P}_{uv}$ značí množinu všech cest v G z u do v.*

Definice 5.4 *O funkci $w : E \to \mathbb{R}$ řekneme, že je nezáporná, jestliže $w(e) \geq 0$ pro každé $e \in E$.*

Pozorování 5.4 *Pro každý vážený graf $G_w = (V, E, w)$, kde w je nezáporná, je funkce $\operatorname{dist}_{G_w}$ metrikou na V.*

Věta 5.5 (Dijkstra) *Pro každý vážený graf $G_w = (V, E, w)$, kde w je nezáporná, a každý vrchol $s \in V$ existuje acyklický faktor T_s t.ž.*

$$\operatorname{dist}_{G_w}(s, v) = \operatorname{dist}_{T_s}(s, v) \quad \textit{pro každý } v \in V.$$

9. října — multigrafy, #koster, bipartitní grafy

Definice 6.1 *Multigraf je uspořádaná dvojice* (V, E_M)*, kde* V *je konečná množina vrcholů, a* E_M *je multimnožina obsahující prvky* $\binom{V}{2}$*. Jinými slovy, každá dvojice vrcholů může být spojena i více než jednou hranou.*

Alternativně, multigraf je vážený graf $G = (V, E, w)$*, kde* $w : E \to \mathbb{N}_{\geq 1}$*. Pro danou hranu* $e \in E$ *říkáme hodnotě* $w(e)$ *násobnost hrany* e*.*

Definice 6.2 *Multigraf* $G = (V, E, w)$ *je souvislý, jestliže graf* (V, E) *je souvislý.*

Definice 6.3 *Cyklus délky* 2 *je multigraf* (V, E_M) *s* $V = [2]$ *a* $E_M = \{\{1, 2\}, \{1, 2\}\}$.

Definice 6.4 *Počet koster multigrafu* $G = (V, E_M)$ *definujeme jako počet* $F \subseteq E_M$ *t.ž.* (V, F) *je strom, a značíme ho* $T(G)$*. Poznamenjme, že aby* (V, F) *mohl býti stromem, tak nutně násobnost káždé hrany v* F *je rovna jedné (tzn.* F *je množina).*

Definice 6.5 *Pro daný multigraf* $G = (V, E_M)$ *a hranu* $\{x, y\} = e \in E$*, definujme multigrafovou kontrakci hrany* e *bez smyček jako následující multigraf, který budeme značit* G/e*, na množině vrcholů* $(V \setminus \{x, y\}) \cup \{z\}$ *s hranami* E'_M*:*

- *Každou* $\{u, v\} \in E_M$*, kde* $\{u, v\} \cap \{x, y\} = \emptyset$*, vložíme do* E'_M*,*
- *každou* $\{u, x\} \in E_M$*, kde* $u \neq y$*, změníme na* $\{u, z\}$ *a vložíme do* E'_M*, a*
- *každou* $\{u, y\} \in E_M$*, kde* $u \neq x$*, změníme na* $\{u, z\}$ *a vložíme do* E'_M*.*

Zdůrazněme, že násobnost každé hrany $\{u, v\}$*, kde* $\{u, v\} \cap \{x, y\} = \emptyset$*, v* G/e *je stejná jako násobnost* $\{u, v\}$ *v* G*, a násobnost každé hrany* $\{u, z\}$ *v* G/e *je rovna součtu násobností hran* $\{u, x\}$ *a* $\{u, y\}$ *v* G*.*

Tvrzení 6.1 *Buď* $G = (V, E_M)$ *multigraf a* $e \in E_M$ *jeho libovolná hrana. Potom platí, že* $T(G) = T(G - e) + T(G/e)$*.*

Definice 6.6 *Graf* $G = (V, E)$ *nazveme bipartitní, jesliže existuje rozklad* V *na dvě částí* L *a* R *t.ž. každá hrana vede "mezi"* L *a* R*, neboli* $|e \cap L| = |e \cap R| = 1$ *pro každou* $e \in E$*.*

Definice 6.7 *Buď* $G = (V, E)$ *graf a* $W \subseteq V$*.* W *nazveme* nezávislou množinou *v* G*, jestliže podgraf* G *indukovaný* W *je prázdný, neboli* $E \cap \binom{W}{2} = \emptyset$*. Jinak řečeno,* $|e \cap W| \leq 1$ *pro každou* $e \in E$*.*

Poznámka — alternativní definice pro bipartitnost: V lze rozdělit na dvě množiny L a R t.ž. obě jsou nezávislé v G.

Pozorování 6.2 *Je-li G bipartitní graf a $H \subseteq G$ jeho podgraf, tak potom H je bipartitní.*

Definice 6.8 *Je-li $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell$ tah v grafu, potom jeho délkou rozumíme počet hran, které obsahuje (tzn. ℓ).*

Definice 6.9 *O tahu v grafu $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots v_{\ell-1}, e_\ell, v_\ell$ řekneme, že je uzavřený, jestliže jeho dva konce jsou stejným vrcholem (tzn. $v_0 = v_\ell$).*

Věta 6.3 *Následující tvrzení jsou pro graf $G = (V, E)$ navzájem ekvivalentní:*

1. *G je bipartitní.*
2. *G neobsahuje uzavřený tah liché délky.*
3. *G neobsahuje indukovaný podgraf isomorfní lichému cyklu.*
4. *G neobsahuje lichý cyklus (jako podgraf, ne nutně indukovaný).*

Věta 6.4 *Každý graf $G = (V, E)$ obsahuje bipartitní faktor (V, F), který splňuje $|F| \geq \left\lceil \frac{|E|}{2} \right\rceil$.*

Věta 6.5 *Každý graf $G = (V, E)$ s $|E| \geq 1$ obsahuje indukovaný podgraf H, který splňuje $\delta(H) > \frac{|E|}{|V|}$.*

15. října — Graham-Pollak, matice (multi)grafu

Definice 7.1 *Buď $G = (V, E)$ graf. O m podgrafech $H_1, H_2, \ldots, H_m \subseteq G$ řekneme, že rozkládají G, jestliže každá hrana $e \in E$ je obsažena v právě jednom podgrafu H_i.*

Věta 7.1 *Pro každé $n \geq 3$ platí, že jsou-li $H_1, H_2, \ldots, H_m$ úplné grafy, každý s nejvýše $n-1$ vrcholy, jež rozkládají K_n, tak potom $m \geq n$.*

Definice 7.2 *Bipartitní graf $G = (V, E)$ s částmi L a R nazveme* úplný bipartitní*, jestliže $|E| = |L||R|$, a značíme ho $K_{|L|,|R|}$.*

Věta 7.2 (Graham-Pollak) *Pro každé $n \geq 2$ platí, že jsou-li $H_1, H_2, \ldots, H_m$ úplné bipartitní grafy, jež rozkládají K_n, tak potom $m \geq n-1$.*

Definice 7.3 *Matice sousednosti multigrafu $G = ([n], E, w)$ je symetrická $n \times n$ matice A_G, kde všechny prvky na diagonále jsou rovny nule, a $(A_G)_{i,j}$ pro $i \neq j$ je rovno* $\begin{cases} w(\{i,j\}) & \text{pokud } \{i,j\} \in E, \text{a} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$

Tvrzení 7.3 *Buď $G = ([n], E, w)$ multigraf s maticí sousednosti A_G. Pro každě $k \in \mathbb{N}$ platí, že prvek matice $(A_G)^k$ na pozici i, j je roven počtu sledů délky k z vrcholu i do vrcholu j.*

Definice 7.4 *Matice incidence multigrafu $G = ([n], E, w)$ s celkem m hranami $e_1, e_2, \ldots, e_m$ je boolovská $n \times m$ matice B_G, kde v i-tém sloupci jsou přesně dve jedničky, a to na pozicích odpovídajících koncům hrany e_i.*

Pozorování 7.4 *Buď $G = ([n], E, w)$ multigraf s maticí sousednosti A_G a maticí incidence B_G. Potom platí, že*

$$B_G \cdot B_G^T = \begin{pmatrix} \deg_G(1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \deg_G(2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \deg_G(n) \end{pmatrix} + A_G \, .$$

Definice 7.5 *Spektrum multigrafu G s n vrcholy jsou vlastní čísla jeho matice sousednosti A_G. Spektrum značíme $\mathrm{Sp}(G) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ a předpokládáme, že platí $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$.*

Tvrzení 7.5 *Buď $G = (V, E)$ graf s maximálním stupněm Δ, a nechť λ_1 je největší vlastní číslo matice sousednosti A_G. Potom platí, že*

$$\Delta \geq \lambda_1 \geq \frac{2|E|}{|V|} = \operatorname{avg}\deg(G)\,.$$

16. října — Perron-Frobenius, Laplaceova matice

Věta 8.1 *Buď $G = (V, E)$ souvislý graf s $|V| \geq 2$, a nechť $\vec{v}$ je vlastní vektor příslušící největšímu vlastnímu číslu A_G. Potom platí, že souřadnice $\vec{v}$ jsou všechny buď ostře kladné, nebo ostře záporné.*

Důsledek 8.2 *Buď $G = (V, E)$ souvislý graf. Potom platí, že násobnost největšího vlastního čísla A_G je rovna jedné.*

Věta 8.3 *Buď $G = ([n], E)$ souvislý graf se spektrem $\mathrm{Sp}(G) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Platí, že $\lambda_n = -\lambda_1 \iff G$ bipartitní.*

Definice 8.1 *Graf G nazveme d-*regulárním *jestliže $\delta(G) = \Delta(G) = d$.*

Věta 8.4 *Buď $G = ([n], E)$ souvislý d-regulární graf s $\mathrm{Sp}(G) = (d, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, a nechť $\vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ jsou odpovídající vlastní vektory k $\lambda_2, \dots, \lambda_n$. Potom pro každé $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ platí, že $\sum_{j \in [n]} (\vec{v_i})_j = 0$.*

Důsledek 8.5 *Buď $G = ([n], E)$ d-regulární graf s $\mathrm{Sp}(G) = (d, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Potom $\mathrm{Sp}\left(\overline{G}\right) = (n - d - 1, -\lambda_n - 1, -\lambda_{n-1} - 1, \dots, -\lambda_2 - 1)$.*

Definice 8.2 *Laplaceova matice multigrafu $G = ([n], E, w)$ je symetrická $n \times n$ matice L_G, kde*

- *$(L_G)_{i,i}$, pro $i \in [n]$, je rovno $\deg_G(i)$, a*
- *$(L_G)_{i,j}$, pro $\{i, j\} \in \binom{[n]}{2}$, je rovno $\begin{cases} -w(\{i,j\}) & \text{pokud } \{i,j\} \in E, \text{a} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$*

Pozorování 8.6 *Buď $G = ([n], E, w)$ multigraf s maticí sousednosti A_G, maticí incidence B_G a Laplaceovou maticí L_G. Potom platí, že*

$$L_G = \begin{pmatrix} \deg_G(1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \deg_G(2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \deg_G(n) \end{pmatrix} - A_G = B_G \cdot B_G^T - 2A_G.$$

Pozorování 8.7 *Buď $G = ([n], E, w)$ multigraf s Laplaceovou maticí L_G. Matice L_G je singulární, a pro každý vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ platí, že*

$$x^T L_G x = \sum_{\{i,j\} \in E_M} \left((\vec{x})_i - (\vec{x})_j\right)^2.$$

Tvrzení 8.8 *Buď $G = ([n], E, w)$ multigraf a L_G jeho Laplaceova matice. Platí, že hodnost L_G je rovna $n - 1 \iff G$ je souvislý.*

29. listopadu — věty Kirchhoff, Euler a Ore/Dirac

Definice 9.1 *Pro čtvercovou matici M s rozměry $n \times n$ a číslo $i \in [n]$ budeme značit $M^{(i)}$ matici získanou z M smazáním i-tého řádku a i-tého sloupce.*

Věta 9.1 (Kirchhoffova věta) *Buď $G = ([n], E, w)$ multigraf s Laplaceovou maticí L_G. Pro každé $i \in [n]$ platí, že $\det L_G^{(i)} = T(G)$, tj. počet koster G.*

Definice 9.2 *Buď $G = (V, E_M)$ multigraf. Tah v G nazvěme Eulerovský, jestliže je uzavřeny a zároveň má délku $|E_M|$ (jinými slovy, obsahuje všechny hrany G).*

Věta 9.2 (Eulerova věta) *Buď $G = (V, E_M)$ multigraf takový, že každý vrchol G má nenulový stupeň. Platí, že G obsahuje Eulerovský tah $\iff$ G je souvislý a $\deg_G(v)$ je sudé číslo pro každý vrchol $v \in V$.*

Důsledek 9.3 *Buď $G = (V, E_M)$ multigraf. G obsahuje tah délky $|E_M|$ $\iff$ G je souvislý a počet vrcholů G lichého stupně je buď 0 nebo 2.*

Definice 9.3 *O grafu $G = (V, E)$ řekneme, že je Hamiltonovský, jestliže obsahuje cyklus s $|V|$ vrcholy jako podgraf. Cyklus v G obsahující všechny vrcholy G nazýváme Hamiltonovský cyklus.*

Věta 9.4 (Oreho věta) *Buď $G = (V, E)$ graf s $|V| \geq 3$ t.ž. každé dva vrcholy $u, w \in V$ nespojené hranou v G splňují $\deg_G(u) + \deg_G(w) \geq |V|$. Potom platí, že G je Hamiltonovský.*

Důsledek 9.5 (Diracova věta) *Buď $G = (V, E)$ graf s $|V| \geq 3$ t.ž. každý vrchol má stupeň alespoň $|V|/2$. Potom platí, že G je Hamiltonovský.*

Tvrzení 9.6 *Buď $G = (V, E)$ graf, ve kterém existuje neprázdná $X \subseteq V$ s následující vlastností: množina $V \setminus X$ indukuje v G podgraf s ostře víc než $|X|$ komponentami souvislosti. Potom platí, že G není Hamiltonovský.*

30. října — neseparovatelné grafy

Definice 10.1 *Buď $G = (V, E)$ graf. Vrchol $v \in V$ nazveme* artikulací, *jestliže $G - v$ má více komponent souvislosti než G.*

Definice 10.2 *Souvislý graf $G = (V, E)$ s $|V| \geq 3$ nazveme* neseparovatelný, *jestliže žádný vrchol G není artikulace.*

Lemma 10.1 *Obsahuje-li souvislý graf $G = (V, E)$ s $|V| \geq 3$ most, potom obsahuje artikulaci.*

Věta 10.2 *Graf $G = (V, E)$ je neseparovatelný $\iff$ pro každé dva vrcholy $u, w \in V$ existují dvě cesty P_1 a P_2 obě vedoucí z u do w t.ž. $V(P_1) \cap V(P_2) = \{u, w\}$. Jinak řečeno, každé dva vrcholy G leží na společné kružnici.*

Definice 10.3 *Buď $G = (V, E)$ graf a nechť $\{u, w\} = e \in E$. Podrozdělením hrany e v G rozumíme graf, který budeme značit $G : e$, získaný z grafu $G - e$ přidáním nového vrcholu v_e, který je následně spojen s vrcholy u a w.*

Lemma 10.3 *Graf $G = (V, E)$ je neseparovatelný $\iff$ pro každou $e \in E$ je $G : e$ neseparovatelný.*

Důsledek 10.4 *Buď $G = (V, E)$ neseparovatelný graf a nechť $e, f \in E$. Potom existuje cyklus v G obsahující e a f.*

Definice 10.4 *Nechť $G = (V, E)$ je graf. Na prvcích množiny E definujme relaci $\sim_B$ t.ž. $e \sim_B f$ právě tehdy, když buď $e = f$, nebo existuje cyklus v G obsahující e a f.*

Tvrzení 10.5 *Pro každý graf $G = (V, E)$ je relace $\sim_B$ ekvivalencí na E.*

Definice 10.5 *Buď $G = (V, E)$ graf. Třídám ekvivalence $\sim_B$ říkáme bloky G.*

5. listopadu — ušaté lemma, Mengerovy věty

Definice 11.1 *Buď $G = (V, E)$ graf a $u, w \in V$ jeho dva různé vrcholy. Přilepením ucha délky ℓ do G mezi u a w rozumíme graf získaný přidáním $\ell - 1$ nových vrcholů $v_1, \ldots, v_{\ell-1}$ do G a následně přidáním cesty $u, v_1, v_2, \ldots, v_{\ell-1}, w$.*

Věta 11.1 (Ušaté lemma) *Každý neseparovatelný graf $G = (V, E)$ lze získat tak, že k cyklu vhodné délky se postupně přilepí posloupnost uší. Jinými slovy, existuje posloupnost $G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_t$ taková, že $G_0 \cong C_\ell$ pro nějaké $\ell \in \mathbb{N}_0$, $G_t \cong G$, a pro každé $i \in [t]$ se graf G_i se získá z grafu G_{i-1} přilepením ucha.*

Definice 11.2 *Buď $G = (V, E)$ graf a $u, w \in V$ jeho dva různé vrcholy. Označme $p_G(u, w)$ jako maximální počet až na konce vrcholově disjunktních cest v G mezi u a w.*

Definice 11.3 *Graf $G = (V, E)$ s $|V| \geq 2$ nazveme* (vrcholově-)k-souvislý, *pokud platí, že $p_G(u, w) \geq k$ pro každé $u, w \in V$. Vrcholovou souvislostí $\kappa(G)$ budeme rozumnět největší k t.ž. G je vrcholově-k-souvislý.*

Věta 11.2 (Menger, vrchol. verze, globál. příchuť) *Graf $G = (V, E)$ je k-souvislý $\iff$ $|V| \geq k + 1$ a pro každé $W \subseteq V$ splňující $|W| \leq k - 1$ platí, že $G - W$ je souvislý.*

Definice 11.4 *Buď $G = (V, E)$ graf a $u, w \in V$ jeho dva různé vrcholy splňující $\{u, w\} \notin E$. Separátorem mezi u a w v G rozumíme nějakou množinu vrcholů $W \subseteq V \setminus \{u, w\}$ t.ž. $G - W$ má vrcholy u a w v různých komponentách souvislosti.*

Definice 11.5 *Buď $G = (V, E)$ graf a $u, w \in V$ jeho dva různé vrcholy splňující $\{u, w\} \notin E$. Označme $c_G(u, w)$ jako minimální velikost separátoru mezi u a w v G.*

Věta 11.3 (Menger, vrchol. verze, lokál. příchuť) *Buď $G = (V, E)$ graf a $u, w \in V$ jeho dva různé vrcholy splňující $\{u, w\} \notin E$. Potom platí, že $p_G(u, w) = c_G(u, w)$.*

6. listopadu — důkaz Mengerovy věty

Lemma 12.1 *Buď $G = (V, E)$ graf který není úplný. Potom platí, že*

$$\kappa(G) = \min_{\substack{u,w \in V : u \neq w, \\ \{u,w\} \notin E}} p_G(u, w) = \min_{\substack{u,w \in V : u \neq w, \\ \{u,w\} \notin E}} c_G(u, w) .$$

Lemma 12.2 *Nechť $G = (V, E)$ je k-souvislý graf a nechť $X \subseteq V$ t.ž. $|X| \geq k$. Označme grafem G^+ graf získaný z G přidáním nového vrcholu x, jehož sousedství $N_{G^+}(x) = X$. Platí, že G^+ je k-souvislý.*

Důsledek 12.3 *Nechť $G = (V, E)$ je k-souvislý graf a nechť $X \subseteq V$ a $Y \subseteq V$ t.ž. $|X| = |Y| = k$. Potom existuje k vrcholově disjunktních cest $P_1, \ldots, P_k$ t.ž. každá cesta P_i, kde $i \in [k]$, má přesně jeden konec v X a druhý donec v Y.*

Důsledek 12.4 *Buď $G = (V, E)$ k-souvislý graf, $X \subseteq V$ velikosti k a $y \in V \setminus X$. Dokažte, že G obsahuje k cest $P_1, \ldots, P_k$ takových, že jeden konec každé cesty je y a druhý leží v X, a dále pro každé $i \neq j$ platí, že $V(P_i) \cap V(P_j) = \{y\}$.*

Definice 12.1 *Buď $G = (V, E_M)$ multigraf a $u, w \in V$ jeho dva různé vrcholy. Označme $p'_G(u, w)$ jako maximální počet hranově disjunktních cest v G mezi u a w.*

Definice 12.2 *Multigraf $G = (V, E_M)$ s $|V| \geq 2$ nazveme* hranově-k-souvislý, *pokud platí, že $p'_G(u, w) \geq k$ pro každé $u, w \in V$. Hranovou souvislostí $\kappa'(G)$ budeme rozumnět největší k t.ž. G je hranově-k-souvislý.*

Věta 12.5 (Menger, hranová verze, globál. příchuť) *Multigraf $G = (V, E_M)$ je hranově-k-souvislý $\iff$ pro každou multimnožinu $F_M \subseteq E_M$ splňující $|F_M| \leq k - 1$ platí, že $G - F_M$ je souvislý.*

Definice 12.3 *Buď $G = (V, E_M)$ multigraf a $u, w \in V$ jeho dva různé vrcholy. Řežem mezi u a w v G rozumíme nějakou multimnožinu hran $F_M \subseteq E_M$ t.ž. $G - F_M$ má vrcholy u a w v různých komponentách souvislosti.*

Definice 12.4 *Buď $G = (V, E_M)$ multigraf a $u, w \in V$ jeho dva různé vrcholy. Označme $c'_G(u, w)$ jako minimální velikost řezu mezi u a w v G.*

Věta 12.6 (Menger, hranová verze, lokál. příchuť) *Buď* $G = (V, E_M)$ *multigraf a* $u, w \in V$ *jeho dva různé vrcholy. Potom platí, že* $p'_G(u, w) = c'_G(u, w)$.

12. listopadu — Digrafy a toky v sítích

Definice 13.1 *Buď $G = (V, E_M)$ multigraf a $X \subseteq V$. Hranici X v G definujeme jako množinu hran G s přesně jedním koncem v X, a značíme ji*

$$\partial_G(X) := \left\{e \in E_M : |e \cap X| = 1\right\}.$$

Pro $v \in V$ budeme zkráceně psát $\partial_G(v)$ namísto $\partial_G(\{v\})$.

Pozorování 13.1 *Buď $G = (V, E_M)$ multigraf a $u, w \in V$ jeho dva různé vrcholy. Potom platí, že*

$$\min_{\substack{X \subseteq V: \\ u \in X \,\&\, w \notin X}} |\partial_G(X)|\,.$$

Definice 13.2 *Digraf $G = (V, A)$ je uspořádaná dvojice: nějaká konečná množina vrcholů V, a množina šipek A, pro kterou platí $A \subseteq (V \times V) \setminus \{(v, v) : v \in V\}$.*

Definice 13.3 *Orientovaný $G = (V, E, o)$ je uspořádaná trojice, kde (V, E) je graf a $o : E \to V$ splňující $o(e) \in e$ pro každé $e \in E$. Orientaci grafu interpretujeme tak, že každá hrana e získala svůj* start, *který odpovídá vrcholu $o(e)$, a* cíl, *který odpovídá opačnému konci e než je $o(e)$. Alternativně lze definovat orientovaný graf jakožto digraf, kde pro každé dva vrcholy $u, w \in V$ platí, že obsahuje nejvýše jednu z šipek (u, w) a (w, u).*

Definice 13.4 *Turnaj je orientovaný graf s n vrcholy a $\binom{n}{2}$ šipkami. Jinými slovy, turnaj je nějaká orientace hran úplného grafu.*

Definice 13.5 *Buď $G = (V, A)$ digraf a nechť $u, w \in V$.* Orientovaná cesta *délky k v G z u do w je posloupnost $u = v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k = w$, kde $\{v_0, \ldots, v_k\} \subseteq V$, $\{e_1, \ldots, e_k\} \subseteq A$, a $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ pro každé $i \in [k]$.*

Definice 13.6 *Buď $G = (V, A)$ digraf.* Orientovaný cyklus *v G je orientovaná cesta z nějakého vrcholu u do nějakého vrcholu w v G společně s šipkou (w, u). Digraf nazveme acyklický, jestliže neobsahuje žádnou orientovanou kružnici.*

Definice 13.7 *Buď $G = (V, A)$ digraf a $X \subseteq V$. Ven-orientovanou hranicí X v G definujeme jako množinu šipek G vycházejících z nějakého vrcholu z X a vedoucí do nějakého vrcholu z $V \setminus X$, kterou budeme značit*

$$\partial^+_G(X) := \left\{(x, y) \in A : x \in X \,\&\, y \in V \setminus X\right\}.$$

Analogicky definujeme dovnitř-orientovnou hranici X v G jako

$$\partial^-_G(X) := \left\{(y, x) \in A : x \in X \,\&\, y \in V \setminus X\right\}.$$

Opět budeme pro $v \in V$ zkracovat $\partial^+_G(\{v\})$ a $\partial^-_G(\{v\})$ na $\partial^+_G(v)$ a $\partial^-_G(v)$.

Lemma 13.2 *Buď $G = (V, A)$ digraf a s a t jeho dva různé vrcholy. Potom nastává právě jedna možnost:*

1. *G obsahuje orientovanou cestu z s do t, nebo*
2. *existuje $X : \{s\} \subseteq X \subseteq V \setminus \{t\}$ t.ž. $\partial_G^+(X) = \emptyset$.*

Definice 13.8 *Buď $G = (V, A)$ digraf a s a t jeho dva různé vrcholy. (Celočíselný) Tok v G z s do t je zobrazení $\varphi : E \to \mathbb{N}_0$ t.ž. pro každé $w \in V \setminus \{s, t\}$ platí*

$$\sum_{e^+ \in \partial_G^+(w)} \varphi(e^+) = \sum_{e^- \in \partial_G^-(w)} \varphi(e^-).$$

Hodnotou φ rozumíme $\displaystyle\sum_{e^+ \in \partial_G^+(s)} \varphi(e^+) - \sum_{e^- \in \partial_G^-(s)} \varphi(e^-)$, *a budeme ji značit* $\mathrm{val}(\varphi)$.

Lemma 13.3 *Buď $G = (V, A)$ digraf, s a t jeho dva různé vrcholy, φ tok z s do t a $X : \{s\} \subseteq X \subseteq V \setminus \{t\}$. Platí, že*

$$\mathrm{val}(\varphi) = \sum_{e^+ \in \partial_G^+(X)} \varphi(e^+) - \sum_{e^- \in \partial_G^-(X)} \varphi(e^-).$$

Definice 13.9 *Buď $G = (V, A)$ digraf, s a t jeho dva různé vrcholy a φ tok z s do t. Nosičem φ rozumíme množinu šipek* $\mathrm{supp}\,\varphi = \{e \in A : \varphi(e) > 0\}$.

Lemma 13.4 *Buď $G = (V, A)$ digraf, s a t jeho dva různé vrcholy a φ tok z s do t. Potom existuje tok ψ z s do t t.ž. $\mathrm{val}(\varphi) = \mathrm{val}(\psi)$ a digraf $(V, \mathrm{supp}\,\psi)$ je acyklický.*

Tvrzení 13.5 *Buď $G = (V, A)$ digraf, s a t jeho dva různé vrcholy a φ tok z s do t splňující $\mathrm{val}(\varphi) = k \geq 0$. Potom existují $P_1, \ldots, P_k$ orientované cesty v G z s do t t.ž. každá $e \in A$ je obsažena v nejvýše $\varphi(e)$ těchto cestách.*

Definice 13.10 *Buď $G = (V, A)$ digraf, s a t jeho dva různé vrcholy, a nechť $c : E \to \mathbb{N}_0$ je zobrazení, kterému budeme říkat* kapacita šipek. *Tok φ z s do t nazveme c-přípustný, jestliže $\varphi(e) \leq c(e)$ pro všechny $e \in A$.*

Definice 13.11 Síť *je uspořádaná pětice (V, A, s, t, c) t.ž. (V, A) je digraf, s a t jeho dva různé vrcholy, a $c : E \to \mathbb{N}_0$ je kapacita šipek. Tokem v síti rozumíme c-přípustný tok v (V, A) z s do t.*

13. listopadu — Ford-Fulkerson, úvod do párování

Definice 14.1 *Buď φ tok v síti (V, A, s, t, c), a nechť $x \in V$. Řekneme, že* **neorientovaná** *("orientace-ignorující", tzn. muže chodit po šipkách i v opačném směru) cesta $P = v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_\ell, v_\ell$, kde $v_0 = s$ a $v_\ell = x$ je* φ-zlepšující cesta z s do t, *jestliže platí pro každé $i \in [\ell]$:*

- *když $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, tak $\varphi(e_i) \leq c(e_i) - 1$, a*
- *když $e_i = (v_i, v_{i-1})$, tak $\varphi(e_i) \geq 1$.*

Lemma 14.1 *Buď φ tok v síti (V, A, s, t, c), a nechť P je nějaká φ-zlepšující cesta z s do t. Potom existuje c-přípustný tok ψ z s do t t.ž. $\mathrm{val}(\psi) = \mathrm{val}(\varphi) + 1$.*

Definice 14.2 *Buď (V, A, s, t, c) síť. Kapacitu množiny X splňující $\{s\} \subseteq X \subseteq V \setminus \{t\}$ definujeme jako*

$$\mathrm{cap}(X) := \sum_{e^+ \in \partial_G^+(X)} \varphi(e^+).$$

Věta 14.2 (Ford-Fulkerson) *Buď (V, A, s, t, c) síť a Φ množina všech c-přípustných toků v (V, A) z s do t. Potom platí, že*

$$\max_{\varphi \in \Phi} \mathrm{val}(\varphi) = \min_{X : \{s\} \subseteq X \subseteq V \setminus \{t\}} \mathrm{cap}(X).$$

Definice 14.3 *Tok ϕ v digrafu (V, A) nazveme* booleovský, *jestliže obor hodnot ϕ je $\{0, 1\}$.*

Definice 14.4 *Buď $G = (V, E)$ graf. Řekneme, že $M \subseteq E$ je párování v G, jestliže pro každé dvě různé hrany $e, f \in M$ platí, že $e \cap f = \emptyset$. Největší možnou velikost párování v G označme $\nu(G)$.*

Definice 14.5 *Buď $G = (V, E)$ graf. Řekneme, že $X \subseteq V$ je vrcholové pokrytí v G, jestliže pro každou hranu $e \in E$ platí, že $|e \cap X| \geq 1$. Nejmenší možnou velikost vrcholového pokrytí v G označme $\tau(G)$.*

Pozorování 14.3 *Pro každý graf $G = (V, E)$ platí, že*

$$\nu(G) \leq \tau(G) \leq 2\nu(G).$$

Definice 14.6 *Buď $G = (V, E)$ graf a M párování v G. Řekneme, že cesta $P = v_0, e_1, v_1, \ldots, e_\ell, v_\ell$ v G je* M-střídavá, *jestliže*

- *buď* $e_i \in M \iff i$ *je liché,*
- *nebo* $e_i \in M \iff i$ *je sudé.*

Definice 14.7 *Buď* $G = (V, E)$ *graf a* M *párování v* G. *Řekneme, že* M*-střídavá cesta* $P = v_0, e_1, v_1, \ldots, e_\ell, v_\ell$ *v grafu* G *je* M-zlepšující, *jestliže*

$$\{v_0, v_\ell\} \cap \bigcup_{f \in M} f = \emptyset.$$

Lemma 14.4 (Berge) *Je-li* $G = (V, E)$ *graf a* M *párování v* G*, potom* $|M| = \nu(G) \iff \nexists$ M*-zlepšující cesta v* G*.*

19. listopadu — bipartitní párování

Věta 15.1 (König) *Je-li $G = (V, E)$ bipartitní graf, potom $\tau(G) = \nu(G)$.*

Definice 15.1 *Buď $G = (V, E)$ graf a $X \subseteq V$. Sousedstvím X nazvěme množinu*

$$N_G(S) := \bigcup_{x \in X} N_G(x).$$

Věta 15.2 (Hall) *Buď $G = (V, E)$ bipartitní graf s partitami A a B. Platí, že $\nu(G) = |A| \iff |N_G(S)| \geq |S|$ pro každou $S \subseteq A$.*

Definice 15.2 *Buď $G = (V, E)$ graf. Párování M v G nazveme perfektní, jestliže $|M| = |V|/2$.*

Důsledek 15.3 *Buď $k \geq 1$. Je-li $G = (V, E)$ k-regulární bipartitní graf, potom G obsahuje perfektní párování. Co víc, G obsahuje k perfektních párování $M_1, M_2, \ldots, M_k$ t.ž. $E = \bigcup_{i \in [k]} M_i$.*

Definice 15.3 *Buď $G = (V, E)$ graf. Největší možnou velikost nezávislé množiny v G označme $\alpha(G)$.*

Pozorování 15.4 *Buď $G = (V, E)$ graf. Potom platí, že*

$$\alpha(G) + \tau(G) = |V|.$$

Definice 15.4 *Buď $G = (V, E)$ graf s minimálním stupněm $\delta \geq 1$. Řekneme, že $F \subseteq E$ je hranové pokrytí v G, jestliže $V = \bigcup_{f \in F} f$. Nejmenší možnou velikost hranového pokrytí v G označme $\rho(G)$.*

Tvrzení 15.5 (Gallai) *Buď $G = (V, E)$ graf s minimálním stupněm $\delta \geq 1$. Potom platí, že*

$$\nu(G) + \rho(G) = |V|.$$

20. listopadu — Tutte-Berge

Definice 16.1 *Buď $H = (V, E)$ graf. Počet komponent souvislosti H, které mají lichý počet vrcholů, budeme značit* $\mathrm{odd}(H)$.

Definice 16.2 *Buď $G = (V, E)$ graf a M párování v G. Počet nespárovaných vrcholů v M budeme značit*

$$\mathrm{unm}_G(M) := |V| - 2|M|.$$

Lemma 16.1 *Buď $G = (V, E)$ souvislý graf t.ž. pro každý $v \in V$ platí, že $\nu(G - v) = \nu(G)$. Potom $\nu(G) = \frac{|V|-1}{2}$. Speciálně, $|V|$ je liché.*

Věta 16.2 (Tutte-Berge) *Buď $G = (V, E)$ graf. Platí, že*

$$\max_{B \subseteq V} \mathrm{odd}(G - B) - |B| = \min_{M \subseteq E \text{ párování}} \mathrm{unm}_G(M).$$

Důsledek 16.3 (Tutte) *Buď $G = (V, E)$ graf. Platí, že G má perfektní párování $\iff$ $|B| \geq \mathrm{odd}(G - B)$ pro každou $B \subseteq V$.*

Důsledek 16.4 *Buď $G = (V, E)$ graf. Potom*

$$\nu(G) = \min_{B \subseteq V} \frac{|V| - \mathrm{odd}(G - B) + |B|}{2}.$$

Důsledek 16.5 (Petersen) *Je-li $G = (V, E)$ 3-regulární graf bez mostů, potom G obsahuje perfektní párování.*

26. listopadu — hranová barevnost

Definice 17.1 *Buď $G = (V, E_M)$ multigraf. Zobrazení $c : E_M \to [k]$ nazveme* hranovým k-obarvením*, jestliže $c^{-1}(i)$ je párování pro každé $i \in [k]$. Jinými slovy, pro každé dvě různé hrany $e \in E_M$ a $f \in E_M$ splňující $|e \cap f| \geq 1$ platí, že $c(e) \neq c(f)$. Hranovou barevností grafu $\chi'(G)$ označíme nejmenší možné k t.ž. existuje hranové k-obarvení G.*

Pozorování 17.1 *Pro každý multigraf G platí, že $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.*

Věta 17.2 (König) *Pro každý bipartitní multigraf G platí, že $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Věta 17.3 (Vizing) *Pro každý graf G platí, že $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Věta 17.4 (Shannon, slabší ver.) *Pro každý multigraf G platí, že $\chi'(G) \leq 3\left\lceil \frac{\Delta(G)}{2} \right\rceil$.*

Definice 17.2 *Pro multigraf $G = (V, E, w)$ nazýváme hodnotu $\mu(G) := \max_{e \in E} w(e)$* maximální násobnost hrany v *G.*

Následující uvádíme bez důkazu:

Věta 17.5 (Vizing, silnější ver.) *Pro každý multigraf G platí, že $\chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$.*

Následující jsme dokázali jen s použitím předcházející (nedokázané) věty:

Věta 17.6 (Shannon) *Pro každý multigraf G platí, že $\chi'(G) \leq \left\lfloor \frac{3\Delta(G)}{2} \right\rfloor$.*

27. listopadu — vrcholová barevnost

Definice 18.1 *Buď $G = (V, E)$ graf. Zobrazení $c : V \to [k]$ nazveme* (vrcholovým) k-obarvením*, jestliže pro každou hranu $\{u, w\} \in E$ platí, že $c(u) \neq c(w)$. Vrcholovou barevností grafu $\chi(G)$ označíme nejmenší možné k t.ž. existuje vrcholové k-obarvení G.*

Pozorování 18.1 *Pro každý graf $G = (V, E)$ graf platí, že $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Definice 18.2 *Pro multigraf $G = (V, E_M)$ definujme jeho* hranograf *(anglicky line-graph) $L(G)$ jako následující graf:*

- *vrcholy $L(G)$ jsou prvky E_M (tzn. hrany G včetně jejich násobností), a*
- *$e, f \in E_M$ jsou spojeny hranou v $L(G)$ právě tehdy, když $|e \cap f| \geq 1$.*

Pozorování 18.2 *Pro každý multigraf G platí, že $\chi'(G) = \chi(L(G))$.*

Definice 18.3 *Nenulový graf $G = (V, E)$ nazveme d-degenerovaný, jestliže existuje $v \in V$ t.ž. $\deg_G(v) \leq d$ a $G - v$ je d-degenerovaný; nulový graf je definitoricky d-degenerovaný pro každé $d \in \mathbb{N}$.*

Tvrzení 18.3 *Pro každý d-degenerovaný graf G platí, že $\chi(G) \leq d + 1$.*

Pozorování 18.4 *Pro každý graf $G = (V, E)$ platí, že $\chi(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{\alpha(G)} \right\rceil$.*

Definice 18.4 *Buď $G = (V, E)$ graf a $W \subseteq V$. W nazveme* klikou v G*, jestliže podgraf G indukovaný W je úplný, neboli $E \cap \binom{W}{2} = \binom{W}{2}$. Jinak řečeno, klika v G odpovídá nezávislé množíně v $\overline{G}$. Největší možnou velikost kliky v G označme $\omega(G)$.*

Pozorování 18.5 *Pro každý graf G platí, že $\chi(G) \geq \omega(G)$.*

Tvrzení 18.6 *Pro každý graf $G = (V, E)$ platí, že $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq |V| + 1$.*

Věta 18.7 (Brooks) *Buď $G = (V, E)$ souvislý graf s $\Delta(G) \geq 3$, který není úplný. Potom platí, že $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Důsledek 18.8 *Je-li G souvislý graf t.ž. $\chi(G) = \Delta(G) + 1$, tak potom G je úplný graf nebo cyklus liché délky.*

Definice 18.5 *Graf $G = (V, E)$ nazveme k-kritickým, jestliže $\chi(G) = k$ a zároveň $\chi(H) < k$ pro každý $H \subsetneq G$.*

Pozorování 18.9 *Každý k-kritický graf je souvislý a $\delta(G) \geq k - 1$.*

Pozorování 18.10 *Buď $G = (V, E)$ k-kritický graf a $S \subseteq V$ t.ž. $G - S$ je nesouvislý. Potom S není klika.*

Definice 18.6 *Buď $G_2 := K_2$ a rekurzivně pro každé $k \geq 3$ definujme graf G_k s $2n + 1$ vrcholy $u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_n, z$, kde $n = |V(G_{k-1})|$, následujícím způsobem:*

1. *sousedství vrcholu z, tj. $N_G(z)$, je rovno $\{w_1, \ldots, w_n\}$.*
2. *vrcholy $u_1, \ldots, u_n$ indukují podgraf isomorfní G_{k-1},*
3. *vrcholy $w_1, \ldots, w_n$ tvoří nezávislou množinu v G_k, a*
4. *dvojice vrcholů u_i a w_j je spojena hranou $\iff$ u_i a u_j je spojeno hranou.*

Věta 18.11 (Mycelski) *Pro každé $k \geq 2$ platí, že graf G_k z předchozí definice má $\chi(G_k) = k$ a zároveň neobsahuje trojúhelník.*

3.prosince — pravděpodobnostní metoda

Definice 19.1 *Buď $G = (V, E)$ graf. Řekneme, že $W \subseteq V$ je dominující množina v G, jestliže pro každý vrchol $x \in V \setminus W$ platí, že $|N_G(x) \cap W| \geq 1$. Nejmenší možnou velikost dominující množiny v G označme $\gamma(G)$.*

Věta 19.1 *Každý graf $G = (V, E)$ s minimálním stupněm δ obsahuje dominující množinu velikosti $|V| \cdot \frac{1+\log(\delta+1)}{\delta+1}$.*

Věta 19.2 (Erdős) *Pro každé $k \geq 3$ a každé $g \geq 3$ existuje graf $G_{k,g}$ t.ž. $\chi(G_{k,g}) \geq k$ a zároveň neobsahuje žádný cyklus délky nejvýše g.*

4. prosince — Ramsey & Turán

Věta 20.1 (Ramseyova věta) *Buď k a ℓ kladná přirozená čísla. Pro každý graf $G = (V, E)$ s $|V| \geq \binom{k+\ell-2}{k-1}$ platí, že $\omega(G) \geq \ell$ nebo $\alpha(G) \geq k$.*

Důsledek 20.2 (symetrický Ramsey) *Buď k kladné přirozené číslo. Pro každý graf $G = (V, E)$ s $|V| \geq 4^k$ platí, že $\omega(G) \geq k$ nebo $\alpha(G) \geq k$.*

Definice 20.1 *Pro každé kladné přirozené k definujeme* Ramseyovo číslo $R(k)$ *jako nejmenší n takové, že pro každé 2-obarvení $c : E(K_n) \to \{1, 2\}$ lze najít c-monochromatický úplný podgraf s k vrcholy.*

Věta 20.3 (Erdős) *Pro každé $k \geq 3$ platí, že $R(k) \geq 2^{k/2}$.*

Věta 20.4 (vícebarevný Ramsey) *Buď k a r kladná přirozená čísla. Existuje n takové, že pro každé r-obarvení $c : E(K_n) \to [r]$ lze najít c-monochromatický úplný podgraf s k vrcholy.*

Věta 20.5 (Goodman) *Každé 2-obarvení $c : E(K_n) \to \{1, 2\}$ obsahuje alespoň*

$$\frac{n(n-1)(n-5)}{24}$$

monochromatických podgrafů K_3.

Věta 20.6 (Mantel/Turán) *Pro každé $k \geq 2$ platí, že neobsahuje-li graf $G = (V, E)$ podgraf K_{k+1}, tak potom*

$$|E| \leq \frac{k-1}{2k} \cdot |V|^2.$$

Tvrzení 20.7 *Buď $G = (V, E)$ graf. Potom*

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v)^2 \geq \frac{4|E|}{|V|}.$$

Věta 20.8 (Erdős) *Neobsahuje-li graf $G = (V, E)$ podgraf C_4, tak potom*

$$|E| \leq \frac{1}{4} \cdot |V| \cdot \left(1 + \sqrt{4|V| + 1}\right).$$

Věta 20.9 *Pro každé prvočíslo p existuje graf $G = (V, E)$ neobsahující podgraf C_4 splňující*

$$|V| = p^2 - 1 \quad \text{a zároveň} \quad |E| \geq \frac{(p-1)(p^2-1)}{2}.$$

Věta 20.10 (Kővari-Sós-Turán) *Buď $s \leq t$ přirozená čísla. Neobsahuje-li graf $G = (V, E)$ podgraf $K_{s,t}$, tak potom*

$$|E| \leq \frac{(t-1)^{\frac{1}{s}} + s - 1}{2} \cdot |V|^{2-\frac{1}{s}}.$$

10. listopadu — rovinné grafy

Definice 21.1 *Buď $G = (V, E)$ graf.* Nakreslením *G v $\mathbb{R}^2$ rozumíme $(g, (f_e)_E)$, kde $g : V \to \mathbb{R}^2$ je prosté zobrazení a $f_e : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ je prosté spojité zobrazení pro každé $e \in E$, splňující následující vlastnosti:*

- *pro každou hranu $\{u, w\} = e \in E$ platí, že $\{f_e(0), f_e(1)\} = \{g(u), g(w)\}$ a*
- *pro každou hranu $\{u, w\} = e \in E$ platí, že $\{f_e(t) : t \in (0,1)\} \cap g(V) = \emptyset$.*

Dále o nakreslení G v $\mathbb{R}^2$ řekneme, že je rovinné*, jestliže pro každé dvě různé hrany $e_1 \in E$ a $e_2 \in E$ platí, že*

$$\{f_{e_1}(t) : t \in (0,1)\} \cap \{f_{e_2}(t) : t \in (0,1)\} = \emptyset.$$

Definice 21.2 *Buď $G = (V, E)$ graf. Řekneme, že G je* rovinný graf*, jestliže existuje rovinné nakreslení G. Uspořádanou trojici $(G, g, (f_e)_E)$, kde $(g, (f_e)_E)$ je rovinné nakreslení G, budeme nazývat* topologický rovinný graf*. Topologický rovinný graf budeme značit $\boxed{G}$.*

Definice 21.3 *Buď $\boxed{G} := (G, g, (f_e)_E)$ topologický rovinný graf, a nechť*

$$X := g(V) \cup \left(\bigcup_{e \in E} \{f_e(t) : t \in [0,1]\} \right).$$

Souvislé oblasti $\mathbb{R}^2 \setminus X$ (v topologickém slova smyslu) budeme nazývat stěny $\boxed{\mathrm{G}}$.

Pozorování 21.1 *Každý topologický rovinný graf $\boxed{G}$ má právě jednu stěnu, jejíchž plocha je neomezená.*

Definice 21.4 *Pro daný topologický rovinný graf $\boxed{G}$ budeme jeho neomezenou stěnu nazývat* vnější stěna*, a budeme ji značit* $\operatorname{ext}\left(\boxed{G}\right)$.

Tvrzení 21.2 *Buď $\boxed{G} = (G, g, (f_e))$ topologický rovinný graf, F nějaká jeho stěna, a nechť ∂F značí množinu hran G, jež leží na hranici F. Potom existuje topologický rovinný graf $(G, g', (f'_e))$ který má hranici své vnější stěny rovnu ∂F.*

Definice 21.5 *Spojité zobrazení $k : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ takové, že $k(0) = k(1)$ a k je na $[0,1)$ prosté, budeme nazývat* topologická kružnice v $\mathbb{R}^2$.

Věta 21.3 (Jordan) *Každá topologická kružnice v* $\mathbb{R}^2$ *rozděluje* $\mathbb{R}^2$ *na právě dvě souvislé oblasti.*

Věta 21.4 (Eulerova formule) *Buď* $G = (V, E)$ *rovinný graf, a nechť* $\boxed{G}$ *je nějaké jeho nakreslení. Potom*

$$|V| - |E| + \#\text{stěn}\,\boxed{G} = 1 + \text{comp}(G).$$

Důsledek 21.5 *Buď* $G = (V, E)$ *rovinný graf s* $|V| \geq 3$*. Potom platí, že* $|E| \leq 3|V| - 6$*. Víme-li navíc, že* G *neobsahuje cyklus délky* 3 *jako podgraf, tak* $|E| \leq 2|V| - 4$*.*

Pozorování 21.6 *Grafy* K_5 *ani* $K_{3,3}$ *nejsou rovinné.*

11. prosince— rovinné grafy #2

Lemma 22.1 *Buď $G = (V, E)$ rovinný 2-souvislý graf a* $\boxed{G}$ *jeho lib. rovinné nakreslení. Potom hranice každé stěny* $\boxed{G}$ *je cyklus v G.*

Definice 22.1 Platónské těleso *je konvexní mnohostěn v $\mathbb{R}^3$ t.ž. každá jeho stěna je ohraničena stejným pravidelným k-úhelníkem, a každý vrchol leží přesně v d stěnách.*

Věta 22.2 *Platónských těles je celkem jen pět: čtyřstěn ($d = k = 3$), krychle ($d = 3$ a $k = 4$), osmistěn ($d = 4$ a $k = 3$), dvanáctistěn ($d = 3$ a $k = 5$) a dvacetistěn ($d = 5$ a $k = 3$).*

Pozorování 22.3 *Buď $G = (V, E)$ graf. G je rovinný $\iff$ $G : e$ je rovinný pro každé $e \in E$.*

Definice 22.2 *Graf H je* podrozdělení *grafu G jestliže existuje posloupnost grafů $F_0, F_1, \ldots, F_k$ a posloupnost hran $e_1, \ldots, e_k$ t.ž. $G \cong F_0$, $H \cong F_k$, $e_i \in E(F_{i-1})$ a $F_i \cong F_{i-1} : e_i$.*

Definice 22.3 *Řekneme, že graf G obsahuje podrozdělení grafu F jestliže existuje $H \subseteq G$ t.ž. H je podrozdělení F.*

Věta 22.4 (Kuratowski) *Graf G je rovinný $\iff$ G neobsahuje podrozdělení K_5 a neobsahuje podrozdělení $K_{3,3}$.*

Úmluva: kontrakce hran v rámci této kapitoly chápeme "NE-multigrafově", tzn. jakékoliv případné násobné hrany po kontrakci zredukujeme na násobnost 1. Speciálně, kontrakcí lib. hrany v prostém neorientovaném grafu získáme opět prostý neorientovaný graf.

Pozorování 22.5 *Buď $G = (V, E)$ graf a $e \in E$. G je rovinný $\Rightarrow G/e$ je rovinný.*

Definice 22.4 *Graf H je* minor *grafu G jestliže existuje posloupnost grafů $F_0, F_1, \ldots, F_k$ a posloupnost hran $e_1, \ldots, e_k$ t.ž. $F_0 \subseteq G$, $H \cong F_k$, $e_i \in E(F_{i-1})$ a $F_i \cong F_{i-1}/e_i$.*

Definice 22.5 *Řekneme, že graf G obsahuje H jako minor jestliže H je minor G.*

Věta 22.6 (Wagner) *Graf G je rovinný $\iff$ G neobsahuje K_5 jako minor a neobsahuje $K_{3,3}$ jako minor.*

Definice 22.6 *Buď $G = (V, E)$ a $H = ([k], F)$ dva grafy. Řekneme, že G obsahuje model H jestliže existují $V_1, V_2, \ldots V_k$ po dvou disjuktní podmnožíny V t.ž.*

- *pro každé $i \in [k]$ množina V_i indukuje v G souvislý podgraf a*
- *je-li $\{i, j\} \in F$ potom existují $v_i \in V_i$ a $v_j \in V_j$ t.ž. $\{v_i, v_j\} \in E$.*

Lemma 22.7 *Graf G obsahuje model H $\iff$ G obsahuje H jako minor.*

Lemma 22.8 *Pokud graf G obsahuje K_5 jako minor, potom G obsahuje podrozdělení K_5 nebo podrozdělení $K_{3,3}$.*

Tvrzení 22.9 *Wagnerova věta je ekvivalentní Kuratowského větě.*

17. prosince— Hadwiger, Thomassen

Tvrzení 23.1 *Rovinný graf obsahuje vrchol stupně nejvýše* 5.

Důsledek 23.2 *Je-li graf G rovinný, tak potom $\chi(G) \leq 6$.*

Věta 23.3 *Je-li graf G rovinný, tak potom $\chi(G) \leq 5$.*

Definice 23.1 *Buď $\boxed{G}$ topologický rovinný graf a nechť $\mathcal{F}$ jsou stěny $\boxed{G}$.* Duálním grafem $\boxed{G}$ *nazveme graf $G^\star$, jehož vrcholy jsou $\mathcal{F}$ a dvě různé stěny $F_1 \in \mathcal{F}$ a $F_2 \in \mathcal{F}$ jsou spojeny v $G^\star$ hranou $\iff$ $|\partial F_1 \cap \partial F_2| \geq 1$.*

Pozorování 23.4 *Duálem topologického rovinného grafu je rovinný graf.*

Věta 23.5 *Buď $G = (V, E)$ graf s $|V| \geq 4$ jež neobsahuje K_4 jako minor. Potom existují dva nesousední vrcholy $v_1 \in V$ a $v_2 \in V$ t.ž. $\deg_G(v_1) \leq \deg_G(v_2) \leq 2$.*

Důsledek 23.6 (Hadwiger pro $k = 4$) *Každý graf G s $\chi(G) \geq 4$ obsahuje K_4 jako minor.*

Pozorování 23.7 *Je-li $G = (V, E)$ k-souvislý graf a $e \in E$, tak potom G/e je $(k-1)$-souvislý.*

Lemma 23.8 *Buď $G = (V, E)$ 3-souvislý graf a $e = \{x, y\} \in E$ t.ž. G/e obsahuje 2-separátor $\{w, z\}$. Potom platí, že (BÚNO) w je vrchol získaný kontrakcí e a $\{x, y, z\}$ je separátor v G.*

Věta 23.9 (Thomassen) *Je-li $G = (V, E)$ 3-souvislý graf s $|V| \geq 5$, tak potom existuje $e \in E$ t.ž. G/e je 3-souvislý.*

18. prosince— Sperner, Crossing Lemma, Mader

Věta 24.1 (Spernerovo lemma) *Buď $G = (V, E)$ 2-souvislý rovinný graf s rovinným nakreslením $\boxed{G}$ takovým, že každá vnitřní stěna je trojúhelník. Dále nechť 1, 2 a 3 jsou nějaké tři vrcholy nakreslené na hranici vnější stěny, a označme*

- P_{12} *cestu po vnější stěně z* 1 *do* 2 *neprocházející* 3,
- P_{23} *cestu po vnější stěně z* 2 *do* 3 *neprocházející* 1, *a*
- P_{31} *cestu po vnější stěně z* 3 *do* 1 *neprocházející* 2.

Konečně, nechť $L : V \to \{1, 2, 3\}$ je zobrazení splňující

- $L(u) \in \{1, 2\}$ *pro každé $u \in V(P_{12})$,*
- $L(v) \in \{2, 3\}$ *pro každé $v \in V(P_{23})$,*
- $L(w) \in \{1, 3\}$ *pro každé $w \in V(P_{31})$, a*
- $L(1) = 1$, $L(2) = 2$, $L(3) = 3$.

Potom existuje "L-duhová" vnitřní stěna $\boxed{G}$, tzn. vrcholy a, b, c na hranici této stěny jež splňují $L(a) = 1$, $L(b) = 2$ a $L(c) = 3$.

Důsledek 24.2 (Brouwerova věta o pevném bodě pro $\mathbb{R}^2$) *Buď Δ pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník v $\mathbb{R}^2$ s vrcholy $(0, 0)$, $(0, 1)$ a $(1, 0)$, tzn.*

$$\Delta := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \,\&\, y \geq 0 \,\&\, x + y \leq 1\right\}.$$

Pro každé spojité zobrazení $f : \Delta \to \Delta$ platí, že existuje $x \in \Delta$ t.ž. $f(x) = x$.

Definice 24.1 *Buď $G = (V, E)$ nerovinný graf a uvažme všechna jeho možná nakreslení v $\mathbb{R}^2$. Pro dáné nakreslení uvažme počet dvojic křížících se nakreslených hran, a označme tzv.* crossing number

$$\operatorname{cr}(G) := \min_{\textit{nakreslení } G} \textit{počet dvojic křížících se nakreslených hran.}$$

Věta 24.3 (Crossing lemma) *Pro každý graf $G = (V, E)$, který splňuje $|E| \geq 4|V|$, platí, že*

$$\operatorname{cr}(G) \geq \frac{1}{64} \cdot \frac{|E|^3}{|V|^2}.$$

Pozorování 24.4 *K_6 lze nakreslit na Möbiovu pásku.*

Věta 24.5 (Mader) *Každý graf $G = (V, E)$ s $|E| \geq 2^{k-3} \cdot |V|$ obsahuje K_k jako minor.*

Důsledek 24.6 *Každý graf G s $\chi(G) \geq 2^{k-2} + 1$ obsahuje K_k jako minor.*