

3. domácí úlohy

- 1a) Mějme binární BCH kód délky n opravující 2 chyby s generujícími kořeny α a α^3 . Uvažme, že jsme místo kódového slova $w \in \{0, 1\}^n$ přijali slovo $x \in \{0, 1\}^n$ a spočetli jsme syndrom $(s_1, s_3) = (x(\alpha), x(\alpha^3))$. Dokažte, že pokud $s_1 = 0$ a $s_3 \neq 0$, tak potom muselo dojít při přenosu $w \rightarrow x$ k alespoň 3 chybám.
- 1b) Mějme binární BCH kód délky n opravující t chyb s generujícími kořeny $\alpha, \alpha^3, \dots, \alpha^{2t-1}$. Uvažme chybový vektor $e \in \{0, 1\}^n$ a necht' i_1, i_2, \dots, i_τ jsou indexy jeho nenulových pozic, tzn. pozic, na kterých došlo k chybě. Spočt'eme si nyní $2t$ -složkový syndrom:

$$\begin{aligned} s_1 &= e(\alpha) = \alpha^{i_1} + \alpha^{i_2} + \dots + \alpha^{i_\tau} \\ s_2 &= e(\alpha^2) = (\alpha^{i_1})^2 + (\alpha^{i_2})^2 + \dots + (\alpha^{i_\tau})^2 \\ s_3 &= e(\alpha^3) = (\alpha^{i_1})^3 + (\alpha^{i_2})^3 + \dots + (\alpha^{i_\tau})^3 \\ &\vdots \\ s_{2t} &= e(\alpha^{2t}) = (\alpha^{i_1})^{2t} + (\alpha^{i_2})^{2t} + \dots + (\alpha^{i_\tau})^{2t}. \end{aligned}$$

Dokažte, že pro každé $j \in \{1, 2, \dots, t\}$ platí, že $s_{2j} = s_j^2$.

- 2) *Vandermondova matice* s parametry a_1, a_2, \dots, a_d je $d \times d$ matice s definovaná vztahem

$$V(a_1, a_2, \dots, a_d) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & & a_d \\ a_1^2 & a_2^2 & & a_d^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & & a_d^3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{d-1} & a_2^{d-1} & & a_d^{d-1} \end{pmatrix}$$

Dokažte, že $\det V(a_1, a_2, \dots, a_d) = \det V(a_1, a_2, \dots, a_{d-1}) \cdot \prod_{i=1}^{d-1} (a_d - a_i)$.

- 3) *Antisymetrická Hadamardova matice* velikosti n je $n \times n$ matice H_n s hodnotami ± 1 na diagonále a ± 1 jinde taková, že každé dva různé řádky jsou na sebe kolmé a $a_{ij} = -a_{ji}$ pro všechny různé dvojice $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Jinými slovy, H_n je matice ± 1 splňující

$$H_n \cdot H_n^T = n \times I_n \quad \text{a} \quad H_n + H_n^T = 2 \times I_n, \quad \text{kde } I_n \text{ je jednotková } n \times n \text{ matice.}$$

Pro nekonečně mnoho hodnot n zkonstruujte (nějakou) antisymetrickou Hadamardovu matici velikosti n .