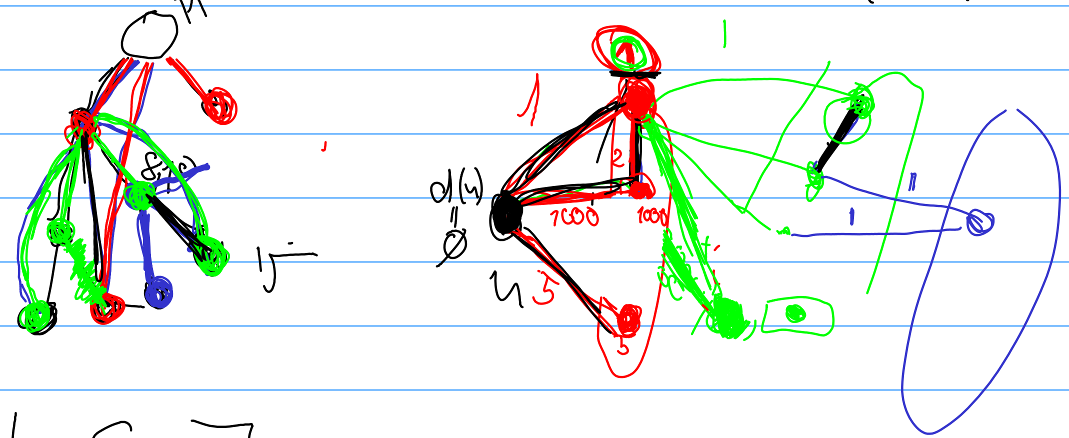
Prohledávání do šířky / BFS

breadth-first search

$G=(V,E)$ orientovaný graf, n vrcholů, m hran



$Q := \text{pole}[n]$

Q – fronta

BFS(G, u)

$\forall v \in V$: $d(v) = +\infty$

$Q \leftarrow u$

$d(u) = 0$; $P(u) := \emptyset$

while $Q \neq \emptyset$

$v \leftarrow$ první v Q, odeber v z Q

$\forall w$: $vw \in E$: pokud $d(w) = +\infty$

přidej w do Q

$d(w) = d(v) + 1$; $P(w) := v$

ČAS

$$\Theta\left(n + \sum_{i=1}^{z} \deg q_i\right) = \Theta(n+m)$$

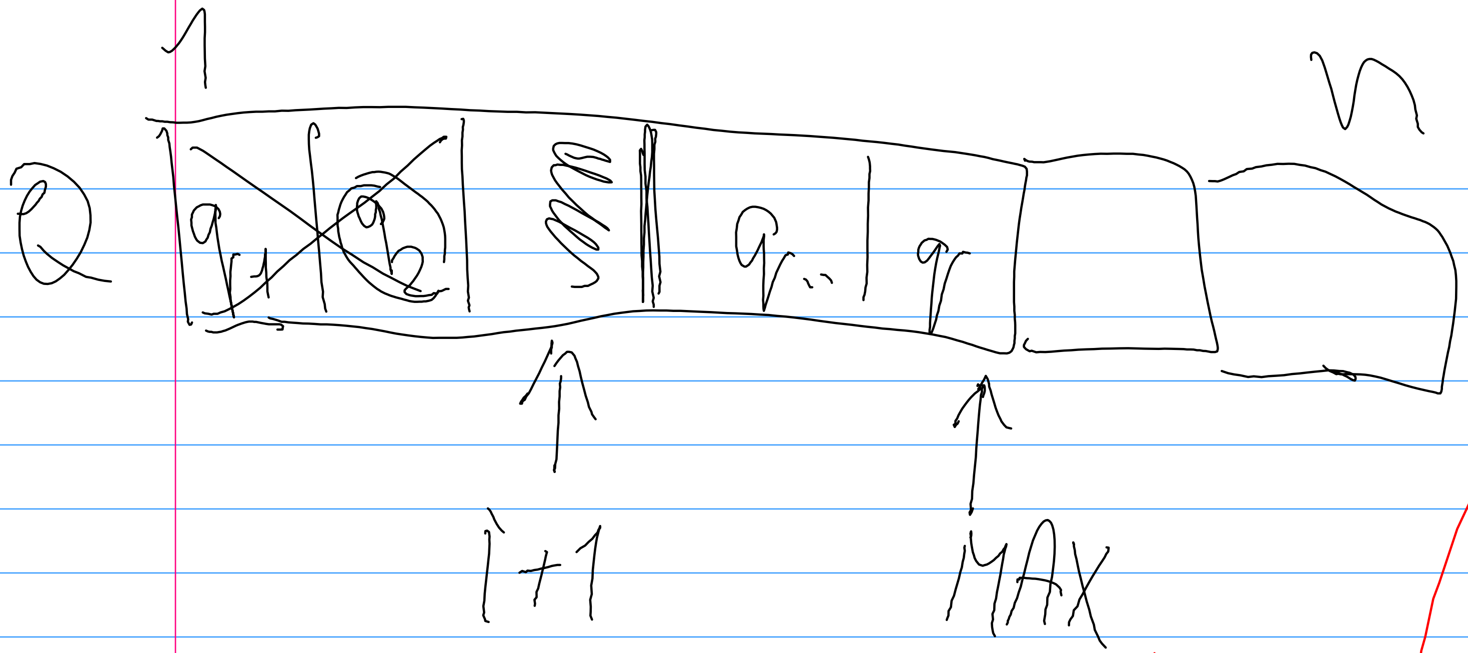
$q_1 \ldots\ldots q_z$

vrcholy co prošly Q

$\forall i$: $q_i \neq q_j$ $\forall i \neq j$

$\Theta(\deg q_i)$

PAMĚŤ $\Theta(n)$



$G,\ v, u \qquad d(u,v) = ?$

$(d(w), p(w))_{w \in V} = BFS(u)$

$d(v) \leftarrow$ odległość z u do v

($+\infty$ gdy $\nexists$ ścieżki $u \to v$)

$x_0 = v$

$p(x_0) \leftarrow x_1$

$p(x_1) \leftarrow x_2$

$\vdots$

$p(x_{\ }) \leftarrow x_{d(v)} = u$

cesty, $\exists$ u dot $u \in V$

Tvrzení: $G' = (V_u, E')$ $E' \subseteq E$

$E' = \{ p(x)x : x \in V_u \setminus \{u\} \}$

V_u = komp souvislosti G obsahující u

$|V_u| - 1$ hran

$\underbrace{G' \text{ je strom}}$, $\underbrace{d_G(u,x) = d_{G'}(u,x)}$

Dk: $\exists$ charakterizace stromu

$\leq$ TRIV

Zbývá $\geq$, pro spor $\exists x_0$ t.ž.

$\overset{\ell}{=} d_G(u, x_0) < d_{G'}(u, x_0)$

BÚNO, volím x_0 že $d_G(u, x_0)$ je nejmenší možné

x_1 je $p(x_0)$; $\ell - 1 = d_G(u, x_1) = \underbrace{d_{G'}(u, x_1)}_{P + x_1 x_0}$ cesta $u \to x_0$ v G'

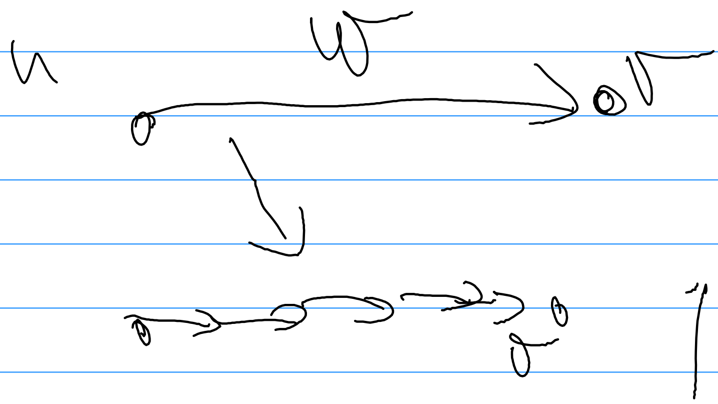
G' je tzv. strom nejkratších cest z u v G

Vážený graf || síť (orientovaný)

$G = (V, E, w)$ $\quad w: E \to \mathbb{R}^+_{\cancel{0}}$

Q: nejkratší cesta z u do v

Co když $w(e) \in \mathbb{N}$, $\forall e \in E$?



$G \rightsquigarrow G^\times$

$V = V^\times$;

$|E^\times| = \sum_{e \in E} w(e) = |E| \cdot \operatorname{avg}_E w$

Dijkstrův algoritmus

vstup: $G = (V, E, w)$, $u \in V$

výstup: $d(w)$ $\forall w \in V$ $d(w)$ = délka nejkratší cesty z $u \to w$

$\forall w$: $d(w) = +\infty$

$z(w) = $ NEPROBRANÝ

$d(u) = 0$ $p(u) := \emptyset$

while $\exists$ neprobraný w t.ž. $d(w) < \infty$

$v := \min_{\text{neprobrané } w} d(w)$

$z(v) = $ PROBRANÝ

$\forall vx \in E$: IF $d(x) > d(v) + w(vx)$

$d(x) := d(v) + w(vx)$

$p(x) := v$

$d(x)$ nikdy neroste, $d(x) \geq 0$

PAMĚŤ: $\Theta(n)$ ČAS: $\Theta(n^2 + m)$

spolu s $\Theta(m + n \log n)$

LEMMA: v každém kroku je $d_G(u,\cancel{x}) \le d(\cancel{x})$

Pro spor, uvažme x_0 a první takové rozbití, vx_0 hrana, $d(v) \ge d_G(u,v)$

$$\underline{d(x_0)} \ge d_G(u,v) + w(vx_0) \ge d_G(u,x_0) \quad \lightning$$

LEMMA: v každém průchodu WHILE cyklu $d_G(u,v) \leq d(v)$ $\forall v$ probrané

Dk: pro spor $\exists v \in V$ v době kdy v probráno tak $d(v) > d_G(u,v)$ $v \neq u$

nechť v_0 je první takové

co do čísla průchodu

takže $d(v_0) > d_G(u,v_0)$, uvažme P v G nejkratší cestu z u do v_0 t.ž. má nejmenší možný #hran

váhy $\varnothing$

t := první neprobaný

v čase uzavírání v_0

když by t nebyl, tak $d(t_0)$

$d_G(u, t_0)$

a v době probírání t_0

$$d(v_0) \leq d(t_0) + w(t_0 v_0)$$

$$\quad = d_G(u, v_0) \lightning$$

s uzavřený $d(t) \leq d(s) + w(st)$

$d(s) = d_G(u, s)$: $d(t) \leq d_G(u,s) + w(st)$

$$\leq d_G(u, v_0) \leq d(v_0)$$

ALE PAK ALG měl zavřít t, ne v_0