Teorie složitosti

ZS 2022/23, FJFI ČVUT

1. domací úlohy

Deadline: 6.11.2022 23:59:59 středoevropského času

1a) Napište a vyřešte rekurenci pro počet kroků algoritmu LinearSelect (z přednášky), který by jako pivota namísto mediánu z mediánů pětic používal medián z mediánů trojic.

1b) Pro $k \geq 3$, napište a vyřešte rekurenci pro počet kroků algoritmu LinearSelect (z přednášky), který by jako pivota namísto mediánu z mediánů pětic používal medián z mediánů $(2k+1)$-tic.

2) Mějme dvě setříděné posloupnosti $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ takové, že $n \leq m$. Zkonstruujte algoritmus, který v čase $O(log(n))$ nalezne medián $X \cup Y$.

3) Uvažte dvě čísla $X = (X_2 \cdot 10^{2n/3} + X_1 \cdot 10^{n/3} + X_0)$ a $Y = (Y_2 \cdot 10^{2n/3} + Y_1 \cdot 10^{n/3} + Y_0)$, spolu s následujícími pěti výrazy:

$$
\begin{array}{ll}
(X_2 + X_1 + X_0) \cdot (Y_2 + Y_1 + Y_0) & (4X_2 + 2X_1 + X_0) \cdot (4Y_2 + 2Y_1 + Y_0) \\
(X_2 - X_1 + X_0) \cdot (Y_2 - Y_1 + Y_0) & (4X_2 - 2X_1 + X_0) \cdot (4Y_2 - 2Y_1 + Y_0) \\
X_0 \cdot Y_0. &
\end{array}
$$

Dokažte, že z daných pěti výrazů lze spočítat $X \cdot Y$, a odvoďte časovou složitost rekurzivního algoritmu pro násobení dvou n-ciferných čísel, který je postaven na spočtení těchto pěti výrazů.

4a) Uvažte rekurenci $T(n) = \sum_{i \in [k]} T(\beta_i \cdot n)$, kde $0 < \beta_i < 1$ pro každé $i \in [k]$, a dokažte, že její strom rekurze ma $\Theta(n^r)$ listů, kde r je řešením rovnice $f(x) = 1$ pro

$$f(x) = \sum_{i \in [k]} (\beta_i)^x.$$

4b) Pomocí předchozí části zformulujte a dokažte rozšířenou variantu Master Theoremu pro rekurence typu $T(1) = 1$ a

$$T(n) = \sum_{i \in [k]} T(\beta_i \cdot n) + \Theta(n^c),\ \text{kde } c \geq 0 \text{ a } 0 < \beta_i < 1 \text{ pro každé } i \in [k].$$