

Domací příklady z diskretní matematiky

2.10.2008

Příklad 1. (1 bod) Na jednom ostrově žijí v míru 3 misionáři a 3 lidožrouti. Jednoho dne ostrov zachvátí požár a všichni se musí přepravit na ostrov sousední. Pro přepravu mezi ostrovy mají k dispozici dvoumístnou loďku a pokud se kdykoli na nějakém ostrově (včetně břehu) vyskytne více lidožroutů než misionářů, lidožrouti své přátele bez milosti snědí. Dokážete vymyslet způsob, jak všechny bezpečně přepravit na druhý ostrov?

Příklad 2. (2 body) Ve stájích pro 500 koní farmář chová své stádo. Když koně postaví do dvouřadu, trojřadu, čtyřřadu, pětřřadu či šestřřadu, vždy mu jeden zbyde. Postaví-li však koně do sedmřřadu, jsou koně rozestaveny správně. Kolik má farmář koní? Je jejich počet určen jednoznačně?

Příklad 3. (3 body) Máme deset pytlů s mincemi (v každém řádově stovky tisíc mincí), některé z nich obsahují mince pravé a jiné jsou zase plné falešných. Dokážete jedním zvážením na digitálních vahách zjistit, ve kterých pytlích jsou padělky?

Příklad 4. (3 body) Máme tabulku čokolády o rozměrech 7×6 a chceme ji rozlámat na jednotlivé dílky, naráz však smíme lámat vždy jen jeden kus. Jaký je nejmenší počet lámání? Dokažte, že méně lámání nestačí.

Příklad 5. (3 body) Buď $a \in A$. Dokažte, že platí:

$$2^A = \{X : X \subseteq A\} = \{Y : Y \subseteq A \setminus \{a\}\} \cup \{Z \cup \{a\} : Z \subseteq A \setminus \{a\}\}$$