

## Diskrétní matematika: série 1 – úvodní úlohy

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit či dokázat.

**Úloha 1.** Na jednom ostrově žijí v míru 3 misionáři a 3 lidožrouti. Jednoho dne ostrov zachvátí požár a všichni obyvatelé se musí přepravit na ostrov sousední. Pro přepravu mezi ostrovy mají k dispozici dvoumístnou loďku a pokud se kdykoli na nějakém ostrově (včetně břehu) vyskytne více lidožroutů než misionářů, lidožrouti své přátele bez milosti snědí. Vymyslete způsob, jak všechny bez újmy na zdraví přepravit na druhý ostrov. (1 bod)

**Úloha 2.** Ve stájích pro 500 koní farmář chová celé své stádo. Když koně postaví do dvouřadu, trojřadu, čtyřřadu, pětiřadu či šestiřadu, vždy mu jeden zbyde. Postaví-li však koně do sedmiřadu, jsou koně rozestaveny správně. Kolik má farmář koní? Je jejich počet určen jednoznačně? (1 bod)

**Úloha 3.** Mějme deset pytlů s mincemi a v každém z nich jsou řádově desítky mincí. 9 pytlů obsahuje pouze pravé mince, které váží 1g. Zbývající pytel, jak už to tak bývá, je plný falešných mincí vážících 1.1g. Dokážete jedním vážením na digitálních vahách určit, který pytel obsahuje falešné mince? (1 bod)

**Úloha 4.** Máme opět deset pytlů s mincemi a tentokrát jsou v každém z nich řádově tisíce mincí. Některé jsou obsahují jen pravé mince, jiné zase pouze falešné. Rozdíl mezi falešnou a pravou mincí je úplně stejný jako v minulé úloze. A stejně jako v minulé úloze máme jedním vážením na digitálních vahách najít všechny pytle s falešnými mincemi. Jak na to? (2 body)

**Úloha 5.** Máme tabulku čokolády o rozměrech  $7 \times 6$  a chceme ji rozlámat na jednotlivé dílky, naráz však smíme lámat vždy jen jeden kus. Jaký je nejmenší počet lámání? Dokažte, že méně lámání nestačí. (2 body)

**Úloha 6.** Bez počítače, mnoha stránek papíru apod. určete poslední cifru v desítkovém zápisu čísla  $2^{22^{222}}$  (2 body)

**Úloha 7.** Buď  $a \in A$ . Dokažte, že platí následující formule:

$$2^A = \{X : X \subseteq A\} = \{Y : Y \subseteq A \setminus \{a\}\} \cup \{Z \cup \{a\} : Z \subseteq A \setminus \{a\}\}$$

(2 body)