Diskrétní matematika: série 6 – pravděpodobnost a střední hodnota

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit či dokázat.

Úloha 1. Najděte náhodné veličiny X a Y takové, že pro ně neplatí vztah
a) $\mathbb{E}\left[X^2\right] = (\mathbb{E}[X])^2$, *(1 bod)*
b) $\mathbb{E}[1/Y] = 1/\mathbb{E}[Y]$. *(1 bod)*

Úloha 2. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodné permutaci π množiny čísel $\{1, 2, \ldots, n\}$ budou čísla 1 a 2 ve stejném cyklu? *(2 body)*

Úloha 3. Do jednoho divadla si na představení zašlo N pánů a každý z nich nechal v šatně klobouk. Po skončení představení však roztržitá šatnářka vracela pánům klobouky zcela náhodně (všechna možná rozdělení klobouků jsou stejně pravděpodobná). Jaká je střední hodnota počtu pánů, kteří dostali zpátky svůj klobouk? *(2 body)*

Úloha 4. Mějme n hracích kostek které mají postupně $1, 2, \ldots, n$ stěn a na každé stěně k-té kostky je postupně $1, 2, \ldots, k$ puntíků. Např. pro $n = 3$ tedy máme tři kostky, z nichž první kostka má jednu stěnu s jedním puntíkem, druhá má dvě stěny s jedním resp. dvěma puntíky a třetí ma stěny tři, s postupně jedním, dvěma a třemi puntíky. Všechny kostky jsou spravedlivé, tj. každá stěna k-té kostky padne s pravděpodobností $\frac{1}{k}$. Jaká je střední hodnota počtu padlých ok při hodu těmito kostkami? *(2 body)*

Úloha ∞+1. *Řešení této úlohy lze odevzdávat až do konce semestru.* Dokažte, nejlépe bez použití řešení úlohy ∞ z minula, že počet všech surjektivních zobrazení z n-prvkové množiny na množinu m-prvkovou je dělitelný číslem $m!$. *(4 body)*

Diskrétní matematika: série 6 – pravděpodobnost a střední hodnota

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit či dokázat.

Úloha 1. Najděte náhodné veličiny X a Y takové, že pro ně neplatí vztah
a) $\mathbb{E}\left[X^2\right] = (\mathbb{E}[X])^2$, *(1 bod)*
b) $\mathbb{E}[1/Y] = 1/\mathbb{E}[Y]$. *(1 bod)*

Úloha 2. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodné permutaci π množiny čísel $\{1, 2, \ldots, n\}$ budou čísla 1 a 2 ve stejném cyklu? *(2 body)*

Úloha 3. Do jednoho divadla si na představení zašlo N pánů a každý z nich nechal v šatně klobouk. Po skončení představení však roztržitá šatnářka vracela pánům klobouky zcela náhodně (všechna možná rozdělení klobouků jsou stejně pravděpodobná). Jaká je střední hodnota počtu pánů, kteří dostali zpátky svůj klobouk? *(2 body)*

Úloha 4. Mějme n hracích kostek které mají postupně $1, 2, \ldots, n$ stěn a na každé stěně k-té kostky je postupně $1, 2, \ldots, k$ puntíků. Např. pro $n = 3$ tedy máme tři kostky, z nichž první kostka má jednu stěnu s jedním puntíkem, druhá má dvě stěny s jedním resp. dvěma puntíky a třetí ma stěny tři, s postupně jedním, dvěma a třemi puntíky. Všechny kostky jsou spravedlivé, tj. každá stěna k-té kostky padne s pravděpodobností $\frac{1}{k}$. Jaká je střední hodnota počtu padlých ok při hodu těmito kostkami? *(2 body)*

Úloha ∞+1. *Řešení této úlohy lze odevzdávat až do konce semestru.* Dokažte, nejlépe bez použití řešení úlohy ∞ z minula, že počet všech surjektivních zobrazení z n-prvkové množiny na množinu m-prvkovou je dělitelný číslem $m!$. *(4 body)*