Diskrétní matematika: série 7 – ještě trocha pravděpodobnosti

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit či dokázat.

Úloha 1. Máme čtyři různé druhy vína a k nim příslušné čtyři etikety. Etikety na lahve nalepíme náhodně, jaká je pravděpodobnost, že nalepíme

a) vše správně, *(1 bod)*
b) dvě etikety správně a dvě špatně, *(1 bod)*
c) alespoň jednu etiketu správně? *(2 bodů)*

Úloha 2. Řekněme, že podíl nakažených HIV v populaci je $0,1\%$. Představte si, že podstoupíte test na HIV, o kterém se ví, že u skutečně nakažených dá pozitivní výsledek v 95% případů a u nenakažených dá (falešný) pozitivní výsledek v 5% případů. Nemáte žádný důvod předpokládat, že byste byli HIV pozitivní, přesto vám test vyjde pozitivně. Jaká je pravděpodobnost, že jste skutečně nakaženi? *(2 body)*

Úloha 3. Mějme spravedlivou minci a házejme tak dlouho, dokud nám za sebou nepadne sekvence panna, panna, orel (PPO), nebo sekvence panna, orel, orel (POO). Jaká je pravděpodobnost, že

a) skončíme po padnutí PPO, *(3 body)*
b) skončíme po padnutí POO, *(3 body)*
c) neskončíme? *(2 body)*

Úloha 4. Jaká je pravděpodobnost, že náhodná permutace π nemá pevný bod. *(5 bodů)*
Hint: princip inkluze a exkluze.

Poznámka: Taylorův rozvoj pro exponenciální funkci říká, že $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. proto narazíte-li na výraz tvaru $\sum_{k=0}^{n} \frac{c^k}{k!}$, můžete předpokládat, že konverguje k e^c sakra (exponciálně) rychle.

Úloha $\infty+2$. *Řešení této úlohy lze odevzdávat až do konce semestru.* Jaká je pravděpodobnost (v závislosti na l), že v náhodné permutaci π množiny čísel $\{1, 2, \ldots, n\}$ budou čísla $1, 2, \ldots, l$ všechna ve stejném cyklu? *(5 bodů)*