Diskrétní matematika: série 10 – kostry, stromy a další grafy

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit či dokázat.

Úloha 1. Ukažte, že každý graf s minimálním stupněm δ obsahuje: *(3 + 2 body)*

a) cestu délky alespoň δ,
b) kružnici délky alespoň $\delta + 1$.

Úloha 2. Dokažte, že každý graf G bez kružnic, pro který platí Eulerův vzorec ($|V(G)| = |E(G)| + 1$), je strom. *(2 body)*

Úloha 3. Spočtěte počet koster úplného grafu bez jedné hrany. *Hint: zkuste použít znalost Cayleho formule pro počet koster úplného grafu.* *(4 body)*

Úloha 4. Bipartitní graf $G = (V, E)$ je graf, jehož množinu vrcholů lze rozdělit na dvě (disjunktní) části V_1, V_2 tak, že každá hrana má jeden konec ve V_1 a druhý ve V_2. V k-regulárním grafu má zase každý vrchol právě k sousedů. Dokažte, že odebereme-li libovolnou hranu ze souvislého k-regulárního bipartitního grafu dostaneme opět souvislý (a bipartitní) graf. Jinými slovy ukažte, že souvislé k-regulární bipartitní grafy neobsahují most. *(4 body)*

Úloha $\infty + 5$. *Řešení této úlohy lze odevzdávat až do konce semestru.* Dokažte, že pro každý silně souvislý orientovaný graf $\vec{G}$ platí následující ekvivalence: $\vec{G}$ obsahuje neorientovaný lichý cyklus právě tehdy, když obsahuje orientovaný lichý cyklus. *(5 bodů)*

Úloha ∞+6. *Řešení této úlohy lze odevzdávat až do konce semestru.* Ukažte, že každý graf s minimálním stupněm δ obsahuje buď cestu procházející všemi vrcholy grafu (tzv. Hamiltonovskou cestu), nebo cestu délky alespoň 2δ (tj. cestu na $2\delta + 1$ vrcholech). *(7 bodů)*

Diskrétní matematika: série 10 – kostry, stromy a další grafy

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit či dokázat.

Úloha 1. Ukažte, že každý graf s minimálním stupněm δ obsahuje: *(3 + 2 body)*

a) cestu délky alespoň δ,
b) kružnici délky alespoň $\delta + 1$.

Úloha 2. Dokažte, že každý graf G bez kružnic, pro který platí Eulerův vzorec ($|V(G)| = |E(G)| + 1$), je strom. *(2 body)*

Úloha 3. Spočtěte počet koster úplného grafu bez jedné hrany. *Hint: zkuste použít znalost Cayleho formule pro počet koster úplného grafu.* *(4 body)*

Úloha 4. Bipartitní graf $G = (V, E)$ je graf, jehož množinu vrcholů lze rozdělit na dvě (disjunktní) části V_1, V_2 tak, že každá hrana má jeden konec ve V_1 a druhý ve V_2. V k-regulárním grafu má zase každý vrchol právě k sousedů. Dokažte, že odebereme-li libovolnou hranu ze souvislého k-regulárního bipartitního grafu dostaneme opět souvislý (a bipartitní) graf. Jinými slovy ukažte, že souvislé k-regulární bipartitní grafy neobsahují most. *(4 body)*

Úloha $\infty + 5$. *Řešení této úlohy lze odevzdávat až do konce semestru.* Dokažte, že pro každý silně souvislý orientovaný graf $\vec{G}$ platí následující ekvivalence: $\vec{G}$ obsahuje neorientovaný lichý cyklus právě tehdy, když obsahuje orientovaný lichý cyklus. *(5 bodů)*

Úloha ∞+6. *Řešení této úlohy lze odevzdávat až do konce semestru.* Ukažte, že každý graf s minimálním stupněm δ obsahuje buď cestu procházející všemi vrcholy grafu (tzv. Hamiltonovskou cestu), nebo cestu délky alespoň 2δ (tj. cestu na $2\delta + 1$ vrcholech). *(7 bodů)*