Diskrétní matematika: série 11 – rovinné grafy

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit či dokázat.

Úloha 1. Najděte a nakreslete nějaký 5-regulární rovinný graf. *(2 body)*

Úloha 2. Pro každý rovinný graf s právě k komponentami souvislosti odvoďte následující variantu Eulerovy formule:

$$n + f = e + 1 + k.$$

Čísla n, f a e označují po řadě počet vrcholů, počet stěn a počet hran rovinného grafu. *(3 body)*

Úloha 3. Z Eulerovy formule odvoďte, že rovinné grafy bez trojúhelníku s $n \geq 3$ vrcholy mají nejvýše $2n - 4$ hran. *(4 body)*

Úloha 4. Bipartitní graf $G = (V, E)$ je graf, jehož množinu vrcholů lze rozdělit na dvě (disjunktní) části V_1, V_2 tak, že každá hrana má jeden konec ve V_1 a druhý ve V_2. Dokažte, že neexistuje rovinný bipartitní graf s $n \geq 3$ vrcholy a $2n - 3$ hranami. *(2 body)*

Úloha $\infty + 7$.

a) Dokažte, že lze hrany rovinného grafu zorientovat tak, že z každého vrcholu vychází nejvýše tři šipky (jinými slovy, výstupní stupeň každého vrcholu je nejvýše 3). *(6 bodů)*

b) Dokažte, že lze hrany rovinného grafu bez trojúhelníků zorientovat tak, že z každého vrcholu vychází nejvýše dvě šipky (jinými slovy, výstupní stupeň každého vrcholu je nejvýše 2). *(4 body)*

Diskrétní matematika: série 11 – rovinné grafy

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit či dokázat.

Úloha 1. Najděte a nakreslete nějaký 5-regulární rovinný graf. *(2 body)*

Úloha 2. Pro každý rovinný graf s právě k komponentami souvislosti odvoďte následující variantu Eulerovy formule:

$$n + f = e + 1 + k.$$

Čísla n, f a e označují po řadě počet vrcholů, počet stěn a počet hran rovinného grafu. *(3 body)*

Úloha 3. Z Eulerovy formule odvoďte, že rovinné grafy bez trojúhelníku s $n \geq 3$ vrcholy mají nejvýše $2n - 4$ hran. *(4 body)*

Úloha 4. Bipartitní graf $G = (V, E)$ je graf, jehož množinu vrcholů lze rozdělit na dvě (disjunktní) části V_1, V_2 tak, že každá hrana má jeden konec ve V_1 a druhý ve V_2. Dokažte, že neexistuje rovinný bipartitní graf s $n \geq 3$ vrcholy a $2n - 3$ hranami. *(2 body)*

Úloha $\infty + 7$.

a) Dokažte, že lze hrany rovinného grafu zorientovat tak, že z každého vrcholu vychází nejvýše tři šipky (jinými slovy, výstupní stupeň každého vrcholu je nejvýše 3). *(6 bodů)*

b) Dokažte, že lze hrany rovinného grafu bez trojúhelníků zorientovat tak, že z každého vrcholu vychází nejvýše dvě šipky (jinými slovy, výstupní stupeň každého vrcholu je nejvýše 2). *(4 body)*