Diskrétní matematika: série 12 – barevnost grafů a další úlohy

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit či dokázat.

Úloha 1. Bez použití věty o 4 barvách dokažte, že každý rovinný graf bez trojúhelníku lze obarvit pomocí 4 barev. *(3 body)*

Úloha 2. Mějme rovinný graf, který má stupně všech vrcholů sudé. Dokažte, že barevnost jeho duálu je přesně dva. *(3 body)*

Úloha 3. Řekneme, že graf je k-kritický, pokud je jeho barevnost rovna k a po odebrání **libovolného** vrcholu či **libovolné** hrany klesne jeho barevnost o jedna.

a) Popište všechny 2-kritické grafy. *(1 bod)*

b) Popište všechny 3-kritické grafy. *(3 body)*

c) Ukažte, že k-kritcký graf je souvislý. *(2 body)*

d) Ukažte, že k-kritický graf neobsahuje artikulaci, tj. vrchol jehož odebraním se graf stane nesouvislým. *(4 bodů)*

Úloha 4. Mějme graf G s barevností rovnou k. Dokažte, že pro každou barvu $i \in 1, 2, \ldots, k$ musí v G existovat vrchol barvy i, jehož sousedé používají všechny zbývající barvy. *(3 body)*

Úloha 5. Dokažte nerovnost

$$\chi(G) \leq \max \{\delta(H), H \text{ podgraf } G\} + 1,$$

kde $\delta(H)$ značí minimální stupeň (pod)grafu H. *(3 body)*

Úloha 6. Dokažte, že rovinný graf s $n \geq 3$ vrcholy má nejvýše $2n - 4$ stěn. *(3 body)*

Úloha 7. Najděte (a nakreslete) všechny 3-regulární grafy na 6 vrcholech a dokažte, že jste na žádný nezapomněli. *(2 body)*

Úloha 8.

a) Dokažte, že 4-regulární graf neobsahuje most, tj. hranu jejímž odebráním se graf stane nesouvislým. *(1 bod)*

b) Dokažte pro každé k, že $2k$-regulární graf neobsahuje most. *(2 body)*