Kombinatorika a grafy I: série 1 – opakování diskrétní matematiky

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit nebo dokázat.

Úloha 1. Barevnost $\chi(G)$ grafu G je nejmenší přirozené číslo k takové, že existuje obarvení vrcholů $f : V(G) \to [k]$ takové, že $f(u) \neq f(v)$ pro každou hranu uv (kde $[k]$ je množina $\{1, 2, \ldots, k\}$). Dokažte následující odhady barevnosti.

a) Pro každý graf G platí: $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, kde $\Delta(G)$ je maximální stupeň vrcholu v G. *(1 bod)*

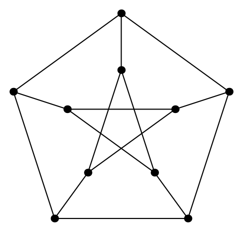
b) Pro každý d-degenerovaný graf G platí: $\chi(G) \leq d + 1$. Graf je d-degenerovaný, pokud v něm existuje vrchol stupně nejvýše d a po jeho odebrání získáme d-degenerovaný graf G' (tedy opět můžeme odebrat další vrchol stupně nejvýše d). Například rovinné grafy jsou 5-degenerované. *(2 body)*

Úloha 2. Nechť $\alpha(G)$ značí velikost největší nezávislé množiny grafu G. Nezávislá množina je podmnožiny vrcholů, že žádné dva z nich nejsou spojeny hranou. Dokažte, že

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{\Delta(G) + 1}.$$

(3 body)

Úloha 3. Dokažte, že Petersenův graf není rovinný. *(2 body)*



Úloha 4. Spočtěte počet koster úplného bipartitního grafu $K_{2,n}$. *(2 body)*

Úloha 5. Nechť graf G má minimální stupeň vrcholu $\delta \geq 2$. Dokažte, že se v grafu nachází cesta a kružnice délky alespoň $\delta + 1$. *(2 body)*

Úloha 6. Tah je posloupnost střídavě vrcholů a hran $v_1 e_1 v_2 e_2 \ldots e_n v_n$, kde se žádná hrana neopakuje, tedy pro $i \neq j$ platí $e_i \neq e_j$. Naopak vrcholy se opakovat mohou.

a) Dokažte, že má-li souvislý graf G všechny stupně sudé až na dva vrcholy, lze jeho hrany nakreslit jedním (ne nutně uzavřeným tahem). *(1 bod)*

b) Rozhodněte, zda lze každý souvislý graf G, který má $2k$ vrcholů lichého stupně a ostatní sudého, nakreslit pomocí k disjunktních ne nutně uzavřených tahů. *(3 body)*

Úloha 7. Nechť $\bar{G}$ značí doplněk grafu G. Tedy $V(G) = V(\bar{G})$ a $uv \in E(\bar{G}) \iff uv \notin E(G)$.

a) Nalezněte graf G, že $G \cong \bar{G}$. *(1 bod)*

b) Dokažte, že každý takový graf musí být souvislý. *(2 body)*

c) Nalezněte nekonečnou třídu takových grafů. *(4 body)*