Kombinatorika a grafy I: série 4 – princip inkluze a exkluze

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit nebo dokázat. Důležitý jsou postup, nikoliv konkrétní číselné výsledky.

Úloha 1. Kolika různými způsoby lze ke kulatému stolu posadit r Rusů, g Germánů a b Bulharů tak, aby příslušníci žádného národa netvořili souvislý úsek? (Předpokládejte, že všichni jsou navzájem rozlišitelní, naopak rozesazení lišící se pouze pootočením stolu považujeme za stejná.) *(2 body)*

Úloha 2. Kolik čísel z $[1000] = \{1, 2, \ldots, 1000\}$ není zároveň dělitelných čísly 2, 3, 5 a 7? *(1 bod)*

Úloha 3. Karetní balíček obsahuje 52 karet čtyř různých barev, 13 karet od každé barvy. Kolika způsoby lze vybrat 13 karet tak, aby mezi nimi byly karty všech barev, jestliže na pořadí karet nezáleží? Co kdyby na pořadí naopak záleželo? *(1 bod)*

Úloha 4. Mějme surjektivní zobrazení $f : [n] \to [m]$.

a) Kolik existuje různých zobrazení f? *(2 body)*

b) Dokažte, že počet různých zobrazení f je dělitelný $m!$, nejlépe bez použití výsledku předchozí části úlohy. *(1 bod)*

Úloha 5. Kolik existuje ekvivalencí na množině $[n]$, které mají přesně k tříd ekvivalence? Kolik existuje ekvivalencí množiny $[n]$? *(3 body)*

Úloha 6. Na n-místném kolotoči jelo n dětí. Děti chtějí jet ještě jednou, ale žádné z nich nechce sedět za stejným dítětem jako při první jízdě. Kolika různými způsoby je můžete posadit na kolotoč, abyste vyhověli jejich přání? (Výsledek nemusíte upravovat.) *(2 body)*

Úloha 7. Mějme dvě přirozená čísla k a l.

a) Volme k a l náhodně rovnoměrně nezávisle z $[n]$. Vypočtěte pravděpodobnost $p(n)$, že čísla k a l budou nesoudělná. *(2 body)*

b) Nahlédněte, že

$$\lim_{n\to\infty} p(n) = \prod_{p \text{ prvočíslo}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

Poznamenejme, že hodnota tohoto součinu vychází překvapivě $\frac{6}{\pi^2}$. *(2 body)*