

Kombinatorika a grafy I: série 5 – vytvořující funkce

Všechny kroky řešení je třeba pečlivě zdůvodnit nebo dokázat.

Úloha 1. Najděte vytvořující funkce pro následující posloupnosti. Nepoužívejte pro zápis nekonečné řady.

- a) $(1, 2, 1, 4, 1, 8, 1, 16, \dots)$, (1 bod)
b) $(1, 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots)$, (1 bod)
c) $(1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots)$. (1 bod)

Úloha 2. Pro každé přirozené číslo $n \geq 2$ dokažte, že počet způsobů, jak napsat n jako součet sudého počtu sčítanců je stejný jako počet způsobů, jak napsat n jako součet lichého počtu sčítanců. Sčítance jsou přirozená čísla větší než 0 a záleží na jejich pořadí. (2 body)

Úloha 3. Najděte posloupnosti určené následujícími vytvořujícími funkcemi, napište formuli pro n -tý člen v uzavřeném tvaru:

a)

$$a(x) = \frac{(1+x)}{(1-3x)^2},$$

(1 bod)

b)

$$b(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1},$$

(1 bod)

c)

$$c(x) = \frac{-11x + 8}{2x^2 - 3x + 1}.$$

(1 bod)

Úloha 4. Spočtete následující sumu, najděte formuli pro n -tý člen v uzavřeném tvaru.

a)

$$s(n) = \sum_{k=1}^n k^3,$$

(2 body)

b)

$$t(n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n}{n-i}.$$

(2 body)